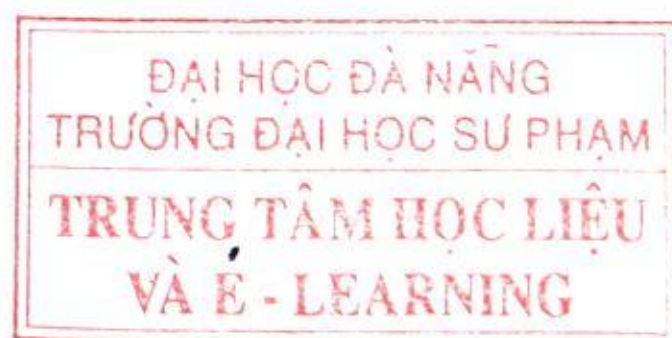


HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CÁC HỆ BÁN DẪN THẤP CHIỀU

HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CÁC HỆ BÁN DẪN THẤP CHIỀU

**NGUYỄN QUANG BÁU (Chủ biên)
NGUYỄN VŨ NHÂN, LÊ THÁI HƯNG,
HOÀNG ĐÌNH TRIỂN, ĐỖ MẠNH HÙNG**

HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CÁC HỆ BÁN DẪN THẤP CHIỀU



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu.....	9
Chương 1 BÁN DẪN THẤP CHIỀU VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG TỬ TRONG LÝ THUYẾT HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH TRONG BÁN DẪN KHỐI	
1.1. Hiệu ứng giảm kích thước trong bán dẫn thấp chiều....	11
1.1.1. Giới thiệu chung.....	11
1.1.2. Sự lượng tử hoá do giảm kích thước.....	14
1.1.3. Điều kiện của các hiệu ứng với kích thước lượng tử.....	15
1.2. Sự giam cầm điện tử và giam cầm phonon trong bán dẫn thấp chiều.....	18
1.2.1. Sự giam cầm điện tử và giam cầm phonon trong bán dẫn hai chiều.....	19
1.2.2. Sự giam cầm điện tử, giam cầm phonon trong bán dẫn một chiều.....	30
1.3. Phương trình động lượng tử cho điện tử trong lý thuyết hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong bán dẫn khối	35
1.3.1. Hấp thụ sóng điện tử trong bán dẫn khối.....	35
1.3.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong bán dẫn khối.....	38

Chương 2	HẤP THU PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG BÁN DẪN HAI CHIỀU	
2.1.	Hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần.....	43
2.1.1.	Hamiltonian tương tác của hệ điện tử-phonon trong siêu mạng hợp phần.....	46
2.1.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần.....	53
2.1.3.	Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần.....	62
2.1.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	68
2.2.	Hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp.....	68
2.2.1.	Hamiltonian tương tác của hệ điện tử-phonon trong siêu mạng pha tạp.....	69
2.2.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp.....	71
2.2.3.	Biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong siêu mạng pha tạp.....	78
2.2.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	87
2.3.	Hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử.....	91
2.3.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon tương tác trong giếng lượng tử.....	91
2.3.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong giếng lượng tử.....	93

2.3.3.	Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử.....	100
2.3.4.	Trường hợp có mặt từ trường ngoài.....	104
2.3.5.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	106

Chương 3 HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG BÁN DẪN MỘT CHIỀU

3.1.	Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn.....	113
3.1.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong dây lượng tử hố thế cao vô hạn.....	113
3.1.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn.....	115
3.1.3.	Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn	122
3.1.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	136
3.2.	Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol.....	148
3.2.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol.....	148
3.2.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol.....	150
3.2.3.	Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol.....	154
3.2.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	160

3.3.	Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn	170
3.3.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn.....	171
3.3.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn.....	172
3.3.3.	Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn.....	174
3.3.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	180
Chương 4	ẢNH HƯỞNG CỦA PHONON GIAM CẦM LÊN SỰ HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH (BỨC XẠ LASER) BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG BÁN DẪN THẤP CHIỀU	
4.1.	Ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng pha tạp.....	189
4.1.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong siêu mạng pha tạp	189
4.1.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp.....	192
4.1.3.	Hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi có ảnh hưởng của phonon giam cầm.....	196
4.1.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	202
4.2.	Ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng hợp phần...	208
4.2.1.	Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong siêu mạng hợp phần.....	208

4.2.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần.....	209
4.2.3.	Hệ số hấp thụ sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi có ảnh hưởng của phonon giam cầm.....	212
4.2.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	215
4.3.	Ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong hố lượng tử.....	224
4.3.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon tương tác trong hố lượng tử.....	224
4.3.2.	Phương trình động lượng tử cho điện tử trong hố lượng tử	225
4.3.3.	Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử.....	228
4.3.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	231
4.4.	Ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử.....	242
4.4.1.	Hamiltonian của hệ điện tử-phonon giam cầm trong dây lượng tử.....	243
4.4.2.	Phương trình động lượng tử của điện tử trong dây lượng tử khi phonon giam cầm.....	244
4.4.3.	Hệ số hấp thụ sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật khi có sự giam cầm phonon.....	246
4.4.4.	Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả.....	248
	PHỤ LỤC.....	251
	TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	271

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách *Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong các hệ bán dẫn thấp chiều* được biên soạn làm tài liệu chuyên khảo cho các sinh viên vật lý năm cuối, các học viên cao học và nghiên cứu sinh chuyên ngành Vật lý lý thuyết và Vật lý - Toán của Khoa Vật lý, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội. Cuốn sách này cũng rất hữu ích cho biên soạn giáo trình, làm tài liệu tham khảo, giảng dạy cho sinh viên các trường Đại học Sư phạm, Đại học Kỹ thuật có học môn Vật lý bán dẫn và đặc biệt cho giáo viên dạy Vật lý ở các trường Đại học, nghiên cứu sinh Vật lý ở các Viện nghiên cứu.

Trong cuốn sách này, chúng tôi chú trọng giới thiệu những cơ sở lý thuyết lượng tử về hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong các hệ bán dẫn thấp chiều như siêu mạng bán dẫn (semiconductors superlattices), siêu mạng hợp phần (composite superlattices), hố lượng tử (quantum wells) thuộc hệ bán dẫn hai chiều (2D); dây lượng tử (quantum wires) thuộc hệ bán dẫn một chiều (1D); chấm lượng tử (quantum dot) thuộc hệ không chiều (0D).

Phần đầu cuốn sách *Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong các hệ bán dẫn thấp chiều* dành giới thiệu tổng quan các hiệu ứng giảm kích thước và sự lượng tử hóa do giảm kích thước trong bán dẫn thấp chiều. Lý thuyết hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện từ tự do trong bán dẫn khối cũng được giới thiệu trong phần này. Lý thuyết hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm (phonon không giam cầm) trong bán dẫn thấp chiều được trình bày trong chương 2 (2D) và chương 3 (1D).

Chương 4 trình bày về ảnh hưởng của phonon giam cầm lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong bán dẫn thấp chiều 2D và 1D.

Việc giới thiệu các phương pháp nghiên cứu vật lý hiện đại nghiên cứu lý thuyết bán dẫn thấp chiều (lý thuyết lượng tử) và các vấn đề thời sự liên quan đến vật lý bán dẫn thấp chiều giúp cho bạn đọc không những hiểu sâu sắc hơn vật lý bán dẫn, vật lý bán dẫn thấp chiều và các ứng dụng của nó, mà còn tạo điều kiện để các học viên bắt kịp với tình hình nghiên cứu vật lý bán dẫn trên thế giới hiện nay.

Biên soạn *Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong các hệ bán dẫn thấp chiều* là một công việc rất khó khăn, nên mặc dù đã hết sức cố gắng chúng tôi cũng không thể đề cập được hết và đầy đủ các mảng của Vật lý bán dẫn thấp chiều, cũng như không thể tránh khỏi một số thiếu sót. Vì vậy, chúng tôi hy vọng nhận được nhiều ý kiến, nhận xét đóng góp của bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Chúng tôi xin cảm ơn các bạn đồng nghiệp thuộc Khoa Vật lý, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, GS.TS. Nguyễn Văn Thỏa, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Hãn, GS. TSKH. Nguyễn Văn Hùng, PGS. TS. Nguyễn Đình Dũng, GS. TS. Hà Huy Bằng đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu trong quá trình biên soạn cuốn sách này.

Các tác giả

CHƯƠNG 1

BÁN DẪN THẤP CHIỀU VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG TỬ TRONG LÝ THUYẾT HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH TRONG BÁN DẪN KHỐI

1.1. HIỆU ỨNG GIẢM KÍCH THƯỚC TRONG BÁN DẪN THẤP CHIỀU

1.1.1. Giới thiệu chung

Tiến bộ của vật lý chất rắn trong hai thập kỷ cuối của thế kỷ XX được đặc trưng bởi sự chuyển hướng đối tượng nghiên cứu chính từ các khối tinh thể sang các màng mỏng và các cấu trúc bán dẫn thấp chiều. Trong các đối tượng mới được nêu trên (từ nay về sau được gọi là hệ), hầu hết các tính chất điện tử đều thay đổi một cách đáng kể. Đặc biệt, một số tính chất mới khác, được gọi là hiệu ứng kích thước đã xuất hiện. Trong các cấu trúc có kích thước lượng tử, nơi các hạt dẫn bị giới hạn trong những vùng có kích thước đặc trưng vào cỡ bước sóng De Broglie, các tính chất vật lý và điện tử thay đổi đầy "kịch tính". Ở đây, các quy luật cơ học lượng tử bắt đầu có hiệu lực, trước hết thông qua việc biến đổi đặc trưng cơ bản nhất của hệ điện tử là phổ năng lượng của nó. Phổ năng lượng trở thành gián đoạn dọc theo hướng tọa độ giới hạn. Dưới ảnh hưởng của trường ngoài hay các tâm tán xạ (phonon, tạp chất, v.v.) thường chỉ một, hai hoặc thậm chí không thành phần mà không phải là ba thành phần động lượng của hạt dẫn có thể biến đổi. Do đó đáng điều của hạt dẫn trong các cấu trúc kích thước lượng tử tương tự như trong

khí một, hai hoặc không chiều, thậm chí khi các hệ trên có quy mô xác định theo tất cả ba chiều tọa độ [1-13].

Cấu trúc với khí điện tử một chiều (dây lượng tử), hai chiều (hố lượng tử bán dẫn) và không chiều (chấm lượng tử) có một loạt các tính chất khác thường so với đặc tính của hệ điện tử và lỗ trống ba chiều thông thường. Minh chứng tiêu biểu là hiệu ứng Hall lượng tử trong hệ hai chiều (hố lượng tử bán dẫn) được phát hiện bởi Fon Clisting năm 1980 và ông đã nhận giải thưởng Nobel về vật lý 5 năm sau đó (năm 1985). Các cấu trúc bán dẫn thấp chiều được ứng dụng ngày càng phổ biến trong nhiều loại linh kiện bán dẫn mới, đặc biệt để đáp ứng các nhu cầu trong lĩnh vực quang điện tử. Việc cấu trúc với khí điện tử một, hai và không chiều ngày nay trở thành trung tâm chú ý của các nhà vật lý có liên quan rất chặt chẽ tới sự phát triển mạnh mẽ và sâu rộng công nghệ epitaxy bằng chùm phân tử, một công nghệ thích hợp nhất để tạo ra các cấu trúc thấp chiều với phân bố thành phần tùy ý và với độ chính xác tới từng lớp đơn phân tử riêng lẻ.

Hiệu ứng Gann là một ví dụ kháng trở vi phân âm (ODS). Hiệu ứng này được phát hiện trong các chất bán dẫn như GaAs, vùng truyền dẫn của chúng thỏa mãn điều kiện đặc biệt, cụ thể là tồn tại các cực tiểu của vùng dẫn điện nằm cao hơn cách điểm cực tiểu chính khoảng từ 0,2 đến 0,4 eV. Về mặt phương pháp, để đạt được điều kiện này trong mọi chất bán dẫn, Esaky và Tsu năm 1970 đã đề nghị xây dựng một cấu trúc tuần hoàn nhân tạo, từ những lớp xen kẽ của hai chất bán dẫn khác nhau với độ dày các lớp khoảng vài nanometer [13]. Họ gọi cấu trúc hai chiều tổng hợp như vậy là siêu mạng. Đã khẳng định rằng sự tuần hoàn nhân tạo dẫn tới sự kiến tạo vùng Brillouin về những vùng Brillouin nhỏ hơn, hoặc những "vùng mini", và vì thế dẫn tới sự xuất hiện các cực tiểu cao hơn của vùng truyền điện với năng lượng cần thiết cho dao động Gann.

Nhờ có sự phát triển các phương pháp hiện đại của sự tăng trưởng, ví dụ như sự mọc ghép chùm phân tử (MPE) và sự mọc ghép thể khí

kim loại hữu cơ (GFEMOS), có thể bắt đầu nuôi dưỡng siêu mạng (SR) do Esaky và Tsu đề xướng [12]. Về thực chất, từ trước ngoài SR, người ta đã nuôi dưỡng nhiều cấu trúc bán dẫn loại khác với các kích thước khoảng vài nanometer (thường ta gọi tắt là cấu trúc NANO). Siêu mạng chỉ là một thí dụ của cấu trúc NANO phẳng hay hai chiều. Người ta đã rất thành công trong việc nghiên cứu và chế tạo các cấu trúc với kích cỡ thậm chí nhỏ hơn hai chiều. Thí dụ những cấu trúc NANO một chiều được gọi là dây lượng tử. Các tinh thể không chiều có kích cỡ NANO được gọi là các chấm lượng tử. Số dạng cấu trúc NANO và phương pháp chế tạo chúng nhiều đến nỗi không thể miêu tả hết tất cả chúng trong một cuốn sách. Một trong những nguyên nhân mà theo đó, cấu trúc NANO được nhiều người quan tâm đó là sự thay đổi thuộc tính dao động và điện tử do kích cỡ thấp hơn và tính đối xứng. Như vậy, cấu trúc NANO đã mang lại cho chúng ta khả năng tuyệt vời để áp dụng những kiến thức đã tiếp thu được trong các phần kiến thức bán dẫn cơ bản trước đó, để hiểu được những thành quả mới trong lĩnh vực vật lý bán dẫn.

Do những hạn chế về dung lượng của cuốn sách, ở đây chúng tôi chỉ xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước lượng tử lên các điện tử; dao động của cấu trúc NANO và những thay đổi liên quan của những tính chất quang và tính chất động. Nhiều nội dung của chương này (chương 1 và cả chương 2 và 3) được chúng ta phân tích và lựa chọn từ tài liệu [12].

Hiện nay, vật lý các hệ bán dẫn thấp chiều, một mặt, tiếp tục phát triển hết sức nhanh chóng và chiếm một vị trí chủ đạo trong vật lý chất rắn hiện đại, mặt khác, đã được hệ thống hoá bởi một loạt luận điểm xây dựng công phu của các nhà vật lý hàng đầu trên thế giới và được công nhận rộng rãi. Những kiến thức đó có thể làm cơ sở cho việc giảng dạy trong các trường đại học và nghiên cứu khoa học.

Để tiếp thu tốt kiến thức trong cuốn sách này người đọc phải tự trang bị các kiến thức cơ bản về cơ học lượng tử, vật lý chất rắn, vật lý và linh kiện bán dẫn. Các tài liệu tham khảo có liên quan đã được liệt kê.

1.1.2. Sự lượng tử hóa do giảm kích thước

Phần này giới thiệu sơ lược tính chất của các cấu trúc bán dẫn khi chuyển động của hạt dẫn bị giới hạn nghiêm ngặt dọc theo một toạ độ với một vùng rất hẹp không quá vài trăm Å (vài chục nanomet). Nếu chiều rộng này so sánh được với chiều dài bước sóng De Broglie của hạt dẫn thì một loạt các hiện tượng vật lý mới được gọi là hiệu ứng kích thước sẽ xuất hiện, làm biến đổi hầu hết tính chất điện tử của hệ và mở ra khả năng ứng dụng cho các linh kiện hoàn toàn mới siêu nhỏ, đa năng và thông minh làm việc theo các nguyên lý hoàn toàn mới.

Xét ví dụ, tính chất của điện tử trong vùng dẫn (gọi là điện tử dẫn) trong một màng rất mỏng với chiều dày a . Vật liệu của màng (kim loại hoặc bán dẫn) đóng vai trò hố lượng tử đối với điện tử với chiều rộng a và chiều sâu có giá trị bằng công thoát Φ . Cơ học lượng tử cho thấy năng lượng của điện tử trong hố đó bị lượng tử hoá, và chỉ gồm có một số xác định các mức năng lượng gián đoạn E_N ($N = 1, 2, \dots$) được gọi là các mức lượng tử hoá do giảm kích thước. Vì giá trị thông thường của Φ khoảng $4 \div 5$ eV, lớn hơn năng lượng nhiệt kT của hạt dẫn vài ba bậc (động năng trung bình chuyển động tịnh tiến, ở nhiệt độ phòng $kT \approx 0,026$ eV), hố lượng tử trong ví dụ đang xét có thể được coi là sâu vô hạn. Hàm sóng của điện tử trong trường hợp này cho các trạng thái E_N được xác định bởi biểu thức:

$$\Psi_N(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi N z}{a}\right) \quad (1.1)$$

và các mức năng lượng tương ứng:

$$E_N = \frac{\pi^2 \hbar^2 N^2}{2ma^2} \quad (1.2)$$

với m là khối lượng hiệu dụng của hạt dẫn.

Trong các dạng cấu trúc lượng tử hoá do giảm kích thước khác được đề cập tới ở phần sau, mặc dù kết luận chung về sự lượng tử hoá do giảm kích thước vẫn có giá trị, nhưng không thể áp dụng được công

thức (1.2). Trong trường hợp chung, như là hệ quả của nguyên lý bất định, người ta dùng biểu thức đánh giá định tính cho các mức năng lượng như sau:

$$E_N \sim \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (1.3)$$

Ta thấy kết quả (1.2) là trường hợp riêng của (1.3).

Kết luận về sự lượng tử hoá năng lượng, cũng như biểu thức cho E_N nêu ở trên chỉ đặc trưng cho chuyển động theo phương pháp tuyến với mặt phẳng của hố thế năng (đọc theo trục tọa độ z). Chuyển động trong mặt phẳng xy (song song với mặt phẳng hố thế năng) không bị ảnh hưởng bởi hố thế năng. Trong mặt phẳng đó, các hạt dẫn chuyển động giống như các hạt tự do và được đặc trưng tương tự như trong vật liệu khối bởi dạng parabolic của phổ năng lượng liên tục với khối lượng hiệu dụng m . Năng lượng tổng cộng của hệ lượng tử hoá kích thước là phổ kết hợp gián đoạn - liên tục, thành phần gián đoạn mô tả chuyển động theo hướng có sự lượng tử hoá, còn thành phần liên tục có quan hệ tới chuyển động trong mặt phẳng của hố thế:

$$E = E_N + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \quad (1.4)$$

với p_x và p_y là các thành phần động lượng tương ứng. Sự biến đổi phổ năng lượng như vậy gây ra những khác biệt đáng kể trong tất cả tính chất điện tử của hệ so với các mẫu khối.

Cần chú ý rằng, nhờ có thành phần liên tục của phổ năng lượng $\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}$ các điện tử thuộc về cùng một mức năng lượng E_N có thể có giá trị năng lượng bất kỳ trong khoảng từ E_N tới vô cực. Tất cả các trạng thái có cùng giá trị N xác định đã cho thường được gọi là thuộc về vùng con lượng tử hoá do giảm kích thước.

1.1.3. Điều kiện của các hiệu ứng với kích thước lượng tử

Hiển nhiên rằng để sự lượng tử hoá phổ năng lượng trong các màng mỏng được nêu ở trên có thể tồn tại trong mọi hiệu ứng quan

sát được thì khoảng cách giữa các mức năng lượng $E_{N+1} - E_N$ phải đủ lớn. Trước hết, giá trị này phải lớn hơn đáng kể năng lượng nhiệt của hạt dẫn:

$$E_{N+1} - E_N \gg kT \quad (1.5)$$

vì trong trường hợp ngược lại, sự lấp đầy hầu hết các mức lân cận và các chuyển mức của điện tử thường xảy ra giữa chúng sẽ ngăn cản quan sát các hiệu ứng lượng tử. Nếu khí điện tử suy biến và có mức năng lượng Fermi ζ , điều kiện sau là cần có:

$$E_2 > \zeta > E_1 \quad (1.6)$$

Trong trường hợp giới hạn ngược lại, khi $\zeta \gg E_{N+1} - E_N$, về nguyên tắc có thể quan sát được hiệu ứng lượng tử hoá do giảm kích thước, nhưng biên độ tương đối thu được rất nhỏ.

Còn tồn tại thêm một điều kiện cần thiết để hiệu ứng lượng tử hoá do giảm kích thước có thể nhận thấy được. Trong các cấu trúc thực tế, hạt dẫn luôn luôn bị tán xạ bởi tạp chất, phonon, v.v. Xác suất tán xạ được đặc trưng bởi thời gian hồi phục động lượng τ , là đại lượng tỷ lệ thuận với một đặc trưng quan trọng khác của hạt dẫn - độ linh động của hạt dẫn $\mu = \frac{e\tau}{m}$. Thời gian hồi phục τ , được định nghĩa là thời gian sống trung bình của hạt dẫn ở trạng thái lượng tử với bộ các số lượng tử xác định đã cho (N, p_x, p_y). Theo nguyên lý bất định, giá trị hữu hạn của τ gây ra trong việc xác định giá trị năng lượng ở trạng thái đã cho sai số vào cỡ $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau}$. Tất nhiên, việc tính toán dựa trên cơ sở các mức năng lượng gián đoạn phân cách nhau trong hệ đang xét chỉ có nghĩa khi khoảng cách giữa hai mức liên tiếp lớn hơn ΔE :

$$E_{N+1} - E_N \gg \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar e}{m\mu} \quad (1.7)$$

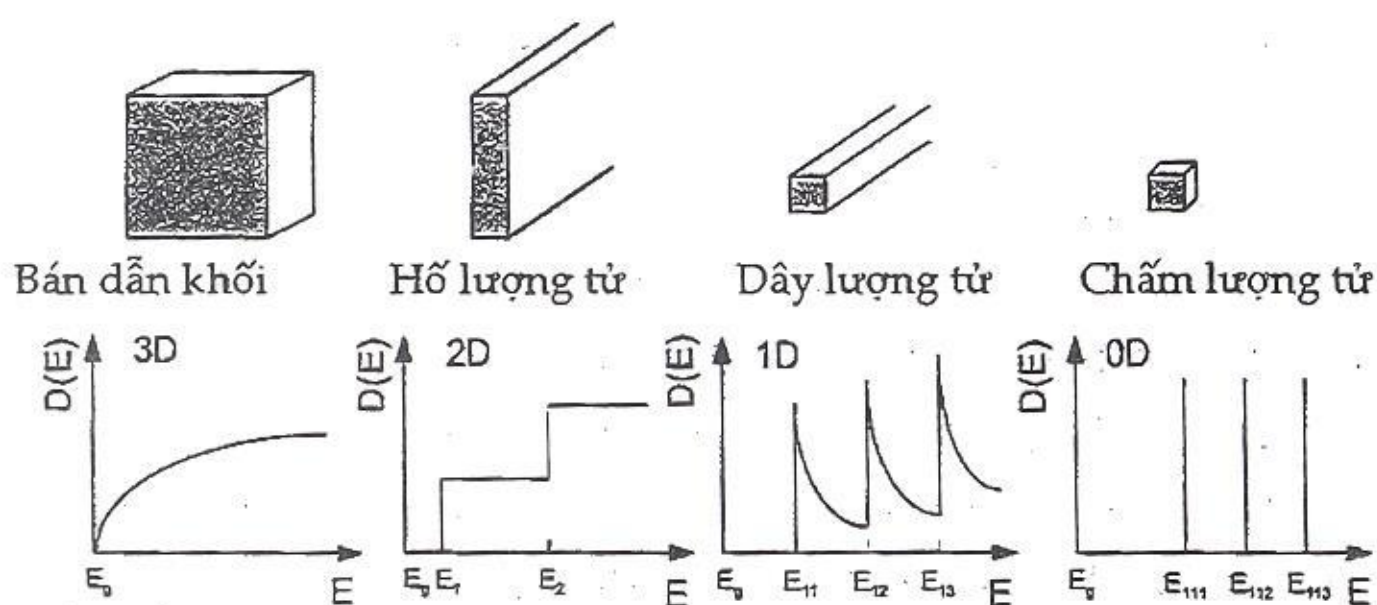
Có thể chỉ ra điều kiện (1.7) tương đương như điều kiện quãng đường tự do trung bình của hạt dẫn l phải lớn hơn chiều dày của màng mỏng a . Theo cơ học lượng tử, sự lượng tử hoá các mức năng lượng xảy ra đảm bảo các hạt chuyển động tuần hoàn. Tuy nhiên, điều này chỉ xảy ra khi tán xạ đủ yếu sao cho khoảng cách giữa hai lần tán xạ (tức là sau khi hạt dẫn đã trái qua quãng đường l), hạt dẫn đã kịp thực hiện vài dao động, nghĩa là hạt dẫn đã vượt qua chiều dày màng mỏng vài lần. Do khoảng cách giữa các mức lượng tử hoá do giảm kích thước tỷ lệ với $\frac{1}{a^2}$ (xem biểu thức (1.3)) nên từ các biểu thức (1.5)-(1.7) đã rút ra kết luận: để quan sát các hiệu ứng lượng tử hoá kích thước đòi hỏi màng mỏng có chiều dày nhỏ, nhiệt độ đủ thấp, độ linh động hạt dẫn cao và nồng độ hạt dẫn đủ thấp.

Để minh hoạ cho kết luận trên, ta hãy xét một ví dụ. Muốn quan sát hiệu ứng lượng tử hoá do giảm kích thước trong bán dẫn ở nhiệt độ thấp với khối lượng hiệu dụng của hạt dẫn $m = 0,1 m_0$, chiều dày màng bán dẫn phải không vượt quá $100 \text{ \AA}$. Trong trường hợp này, độ linh động của hạt dẫn phải lớn hơn một cách đáng kể giá trị $1000 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Ngoài ra, còn phải thoả mãn thêm một điều kiện của hiệu ứng lượng tử hoá do giảm kích thước. Đó là chất lượng bề mặt cao. Sự phản xạ của hạt dẫn tại bề mặt của màng mỏng phải gần như là phản xạ gương, hay nói cách khác, thành phần động lượng của hạt dẫn song song với bề mặt phải được bảo toàn trong phản xạ. Giả sử điều ngược lại là đúng, lúc đó tại mỗi sự kiện phản xạ hạt dẫn sẽ "quên" trạng thái trước đó của mình, hay ta có hiện tượng tán xạ hiệu dụng. Dễ dàng chỉ ra rằng trong trường hợp đó, quãng đường tự do l của hạt dẫn trở thành xấp xỉ với chiều dày của màng mỏng a - dẫn đến điều kiện $l \gg a$ nêu trên bị vi phạm.

Để đảm bảo hạt dẫn phản xạ gương trên bề mặt màng mỏng, chiều dài bước sóng De Broglie λ của chúng phải lớn hơn kích thước đặc trưng của độ gồ ghề, đặc điểm mà bất kỳ bề mặt nào cũng khó tránh khỏi. Ngoài ra, bề mặt của màng mỏng không được chứa mật độ cao các tâm tích điện, nguyên nhân gây thêm các tán xạ phụ đối với hạt dẫn.

1.2. SỰ GIAM CẦM ĐIỆN TỬ VÀ GIAM CẦM PHONON TRONG BÁN DẪN THẤP CHIỀU

Trong các hệ vật liệu thấp chiều (hình 1.1), ở đó chuyển động của điện tử trong hệ bị giới hạn theo một số chiều xác định trong không gian và chỉ chuyển động tự do theo các chiều còn lại trong mạng tinh thể. Ở các chiều bị giới hạn, chuyển động của điện tử bị định xứ mạnh trong vùng rất hẹp không quá vài trăm Å. Khi các hạt dẫn bị giới hạn trong những vùng có kích thước đặc trưng cỡ bước sóng De Broglie thì một loạt các hiện tượng vật lý mới được gọi là hiệu ứng kích thước sẽ xuất hiện, làm biến đổi hầu hết tính chất điện tử của hệ.



Hình 1.1. Mô hình cấu trúc của bán dẫn thấp chiều 3D, 2D, 1D và 0D [1]

Theo các chiều bị giới hạn, năng lượng của điện tử bị lượng tử hóa, chỉ gồm có một số xác định các mức năng lượng gián đoạn E_N ($N=1, 2, \dots$) được gọi là các mức năng lượng lượng tử hóa do giảm kích thước. Đối với các chiều tự do, các hạt dẫn chuyển động như trong bán dẫn khối, không bị ảnh hưởng bởi hố thế năng, phổ năng lượng có dạng Parabolic liên tục với khối lượng hiệu dụng m^* . Khi đó năng lượng tổng của hệ điện tử là phổ kết hợp gián đoạn - liên tục, thành phần gián đoạn mô tả chuyển động theo hướng có sự lượng tử hóa, còn thành phần liên tục có quan hệ tới chuyển động trong mặt phẳng của hố thế. Hiệu ứng trên chỉ xảy ra khi: khoảng cách giữa hai mức năng lượng liên tiếp phải lớn hơn đáng kể so với năng lượng nhiệt của hạt dẫn; lớn hơn đáng kể so với $\Delta E = \hbar / \tau$ (τ là thời gian hồi phục động lượng).

Phonon, tương tự như điện tử, cũng có thể thể hiện ở dạng sóng Bloch với tỷ lệ phát tán hình thành sự phụ thuộc các năng lượng cho phép (tức tần số) với vector sóng Bloch. Janotsy và các tác giả khác đã đưa ra đường cong độ phân tán cho phonon trong GaAs và AlAs, những đại diện đặc trưng cấu trúc của nó. Những đặc tính được chỉ ra đã cho thấy nó hoàn toàn không ngăn cản sự lượng tử hóa với phonon: trong bất kỳ hệ thống nào từ ba chất liệu cho trước, những phonon âm của chúng di chuyển đi trong cả hai chất liệu từ dải tần 0 đến tần số cao nhất của chất liệu mềm hơn trong nghĩa độ co giãn. Đối với phonon quang, chúng tạo ra các vùng hẹp với tâm điểm gần 280cm^{-1} trong GaAs và 380cm^{-1} trong AlAs. Ở khoảng một tần số tương ứng mode quang trong GaAs, không tồn tại mode truyền trong AlAs. Do vậy phải xuất hiện hiệu ứng lượng tử hóa với phonon.

1.2.1. Sự giam cầm điện tử và giam cầm phonon trong bán dẫn hai chiều

Trong hệ bán dẫn hai chiều, chuyển động của của điện tử và phonon bị giới hạn theo một chiều và chuyển động tự do theo hai chiều còn lại trong không gian mạng tinh thể (chiều bị giới hạn có kích thước vào cỡ bước sóng De Broglie). Phổ năng lượng của điện tử bị gián đoạn dọc theo hướng tọa độ bị giới hạn và hàm mật độ trạng thái của hệ bán dẫn hai chiều có dạng bậc thang. Hiện nay, vật liệu với cấu trúc khí điện tử hai chiều, một mặt tiếp tục phát triển hết sức nhanh chóng và chiếm một vị trí chủ đạo trong vật lý hiện đại, mặt khác, được hệ thống hóa bởi một loạt luận điểm xây dựng công phu bởi các nhà vật lý hàng đầu trên thế giới và được công nhận rộng rãi.

1.2.1.1. Siêu mạng hợp phần

Siêu mạng hợp phần là vật liệu bán dẫn mà hệ điện tử có cấu trúc chuẩn hai chiều, được cấu tạo từ một lớp mỏng bán dẫn với độ dày d_1 , ký hiệu là A, độ rộng vùng cấm hẹp $\mathcal{E}_g^A$ (ví dụ như GaAs) đặt tiếp xúc với lớp bán dẫn mỏng có độ dày d_2 ký hiệu là B có vùng cấm rộng $\mathcal{E}_g^B$ (ví dụ

AlAs). Các lớp mỏng này xen kẽ nhau vô hạn dọc theo trục siêu mạng (hướng vuông góc với các lớp trên). Trong thực tế tồn tại nhiều lớp mỏng kế tiếp dưới dạng B/A/B/A (hình 1.2)..., và độ rộng rào thế đủ hẹp để các lớp mỏng kế tiếp nhau như một hệ tuần hoàn bổ sung vào thế mạng tinh thể. Khi đó, điện tử có thể xuyên qua hàng rào thế di chuyển từ lớp bán dẫn vùng cấm hẹp này sang lớp bán dẫn có vùng cấm hẹp khác. Do đó, điện tử ngoài việc chịu ảnh hưởng của thế tuần hoàn của tinh thể nó còn chịu ảnh hưởng của một thế phụ. Thế phụ này được hình thành do sự chênh lệch năng lượng giữa các cận điểm đáy vùng dẫn của hai bán dẫn siêu mạng, và cũng biến thiên tuần hoàn nhưng với chu kỳ lớn hơn rất nhiều so với hằng số mạng. Sự có mặt của thế siêu mạng đã làm thay đổi cơ bản phổ năng lượng của điện tử. Hệ điện tử trong siêu mạng hợp phần khi đó là khí điện tử chuẩn hai chiều. Các tính chất vật lý của siêu mạng được xác định bởi phổ điện tử của chúng thông qua việc giải phương trình Schrodinger với thế năng bao gồm thế tuần hoàn của mạng tinh thể và thế phụ tuần hoàn trong siêu mạng. Phổ năng lượng của điện tử trong siêu mạng hợp phần có dạng [14, 15, 16, 17]:

$$\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) = 2\Delta - \Delta(\cos k_x d + \cos k_y d) \quad (1.8)$$

Trong biểu thức (1.8), Δ là độ rộng của vùng mini; $d=d_1+d_2$ là chu kỳ siêu mạng; d_1, d_2 là độ dày hai lớp bán dẫn, k_x, k_y là các độ lớn vector xung lượng của điện tử theo hai trục tọa độ x, y trong mặt phẳng siêu mạng. Phổ năng lượng của mini vùng có dạng:

$$\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) = \varepsilon_n - \Delta_n \cos k_z d \quad (1.9)$$

Δ_n là độ rộng của mini vùng thứ n được xác định bởi:

$$\Delta_n = -4(-1)^n \frac{d_0}{d-d_0} \varepsilon_n \frac{\exp\left\{-\sqrt{2m^*} (d-d_0)^2 U_0 / \hbar^2\right\}}{\sqrt{2m^*} (d-d_0)^2 U_0 / \hbar^2} \quad (1.10)$$

Trong công thức (1.10), d_0 là độ rộng của hố thế biệt lập; $U_0 = \Delta\varepsilon_c + \Delta\varepsilon_v$ là độ sâu của hố thế biệt lập; $\Delta\varepsilon_c = |\varepsilon_c^A - \varepsilon_c^B|$ là độ sâu

của hố thế giam giữ điện tử được xác định bởi cực tiểu của hai vùng dẫn của hai bán dẫn A và B; $\Delta\epsilon_v = |\epsilon_v^A - \epsilon_v^B|$ là độ sâu của hố thế giam giữ lỗ trống được xác định bởi hiệu các cực đại của các khe năng lượng giữa hai bán dẫn A và B; n là chỉ số mini vùng; $\epsilon_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* d^2} n^2$ là các mức năng lượng trong hố thế biệt lập.

$$\cos(k_z d) = \cos(k_1 a) \sinh(k_2 b) - \frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2} \sin(k_1 a) \sinh(k_2 b)$$

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \left(2m^{*(2)} \epsilon_s(k_z) \right)^{1/2};$$

$$k_2 = \frac{1}{\hbar} \left[2m^* \left(\Delta(r) - \epsilon_s(k_z) \right) \right]^{1/2}$$

Từ đó ta có:

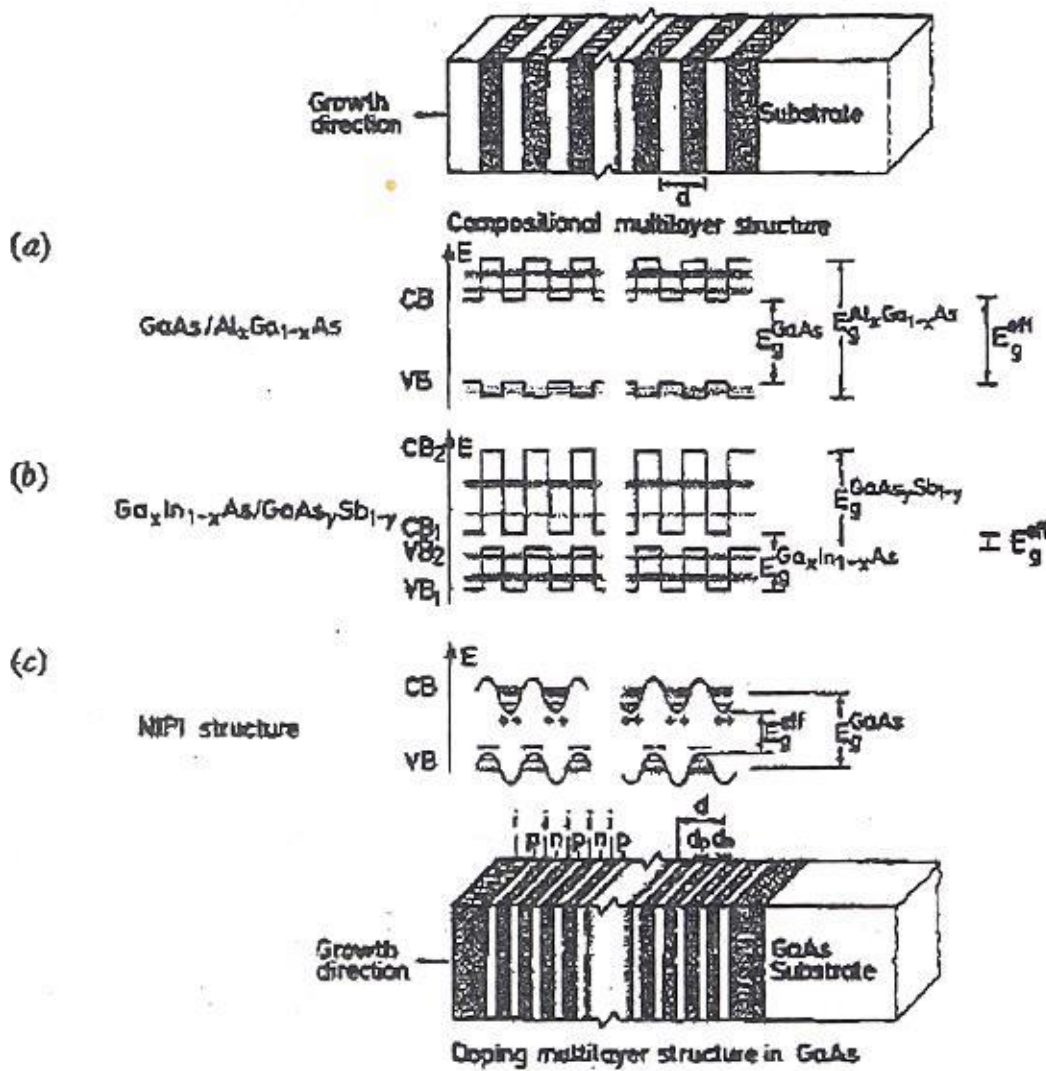
$$\epsilon_n(\vec{k}_\perp) = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m^* d^2} - \Delta_n \cos(k_z d) \quad (1.11)$$

$\Delta(r) = \Delta\epsilon_c + \Delta\epsilon_v$ là thế siêu mạng được xác định bởi hiệu các khe năng lượng hai bán dẫn. Như vậy, thế của siêu mạng bằng tổng năng lượng chênh lệch của các vùng dẫn $\Delta\epsilon_c$ và độ chênh lệch năng lượng các vùng hóa trị $\Delta\epsilon_v$ của hai lớp bán dẫn kế tiếp. Như đã trình bày ở trên, vì chu kỳ của siêu mạng lớn hơn nhiều so với hằng số mạng, trong khi đó biên độ của thế siêu mạng lại nhỏ hơn nhiều so với biên độ của thế mạng tinh thể [1]. Do đó, ảnh hưởng của thế tuần hoàn trong siêu mạng chỉ thể hiện ở các mép vùng năng lượng. Tại các mép của vùng năng lượng, quy luật tán sắc có thể xem là dạng bậc hai, phổ năng lượng có thể tìm thấy trong gần đúng khối lượng hiệu dụng. Đối với các vùng năng lượng đẳng hướng không suy biến, phương trình Schrodinger có dạng:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta^2 \psi(r) + \Delta(r) \psi(r) = E \psi(r)$$

Vì $\Delta(r)$ là tuần hoàn nên hàm sóng của điện tử $\psi(r)$ có dạng hàm Block thỏa mãn điều kiện biên trên mặt tiếp xúc giữa hố thế và hàng rào thế. Hàm sóng tổng cộng của điện tử trong mini vùng n của siêu mạng hợp phần (trong gần đúng liên kết mạnh) có dạng [16, 17, 18]:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y N}} \exp[i(k_x x + k_y y)] \sum_{m=1}^{N_d} \exp(ik_z md) \psi_s(z - md) \quad (1.12)$$



Hình 1.2. Giản đồ minh họa sắp xếp các lớp và vùng năng lượng không gian thực của hai kiểu siêu mạng hợp phần (a, b) và siêu mạng pha tạp bán dẫn loại III-V (c) [18].

trong đó, L_x, L_y là độ dài chuẩn hóa theo hướng x và y ; d và N_d là chu kỳ và số chu kỳ siêu mạng hợp phần; $\psi_s(z)$ là hàm sóng của điện tử trong hố cô lập.

Đối với phonon trong siêu mạng hợp phần, do chỉ được dao động tự do theo hai phương (giả sử là Ox, Oy), phương Oz bị giới hạn bởi thế

giam cầm, do vậy năng lượng $\hbar\omega_{m,\vec{q}}$, vector sóng $\vec{q}$ của phonon bị lượng tử hóa (Fuchs và Kliever, 1965) [19] được biểu diễn như sau:

$$\hbar\omega_{m,\vec{q}} = \hbar\omega_0 - \beta \left[q_{\perp}^2 + \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 \right]; \vec{q} = \vec{q}_{\perp} + \vec{q}_z; \vec{q}_{\perp} = \vec{q}_x + \vec{q}_y; q_z = \frac{m\pi}{d} \quad (1.13)$$

trong đó $m = 0, 1, 2, \dots$ là chỉ số lượng tử đặc trưng cho sự giam cầm phonon trong siêu mạng hợp phần; β là tốc độ truyền âm trong siêu mạng.

Do vector sóng của phonon bị lượng tử hóa, dẫn đến các thừa số đặc trưng cho tương tác điện tử phonon cũng thay đổi theo [18, 19, 20]:

$$|C_{m,\vec{q}_{\perp}}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{m,\vec{q}_{\perp}}}{\epsilon_0 V} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \frac{1}{q_{\perp}^2 + q_z^2} \quad \text{với phonon quang;}$$

$$|C_{m,\vec{q}_{\perp}}|^2 = \frac{\hbar \xi^2}{2V \rho v_s} \sqrt{\vec{q}_{\perp}^2 + q_z^2} \quad \text{với phonon âm} \quad (1.14)$$

$$I_{nn'}^m = \int_0^s \psi_n^*(z) \psi_{n'}(z) e^{iq_z z} dz \quad (1.15)$$

trong đó, χ_{∞} và χ_0 tương ứng là hệ số điện thẩm cao tần, v_s là vận tốc sóng âm, ρ là mật độ của tinh thể.

1.2.1.2. Siêu mạng pha tạp

Siêu mạng pha tạp (doping superlattices) là vật liệu bán dẫn, ở đó hệ điện tử có cấu trúc chuẩn hai chiều. Siêu mạng pha tạp được cấu tạo từ hai bán dẫn đồng chất nhưng được pha tạp một cách khác nhau và xếp chồng lên nhau (hình 1.2). Trong siêu mạng pha tạp, thể siêu mạng được tạo nên nhờ sự phân bố tuần hoàn trong không gian của các điện tích. Sự phân bố điện tích đóng vai trò quyết định đối với việc tạo nên bán dẫn pha tạp [1, 2, 18, 21, 22]. Ví dụ về một siêu mạng như vậy (hình 1.2) được tạo nên nhờ sự sắp xếp tuần hoàn của các lớp bán dẫn mỏng GaAs loại n (GaAs:Si) và GaAs loại p (GaAs:Be), ngăn cách bởi các lớp không pha tạp (gọi là tinh thể n-i-p-i). Khác với siêu mạng hợp phần, thể

tuần hoàn trong siêu mạng pha tạp được tạo ra bởi các điện tích trung gian. Nguyên nhân của sự khác biệt này là do khe hở các thành phần của mạng tạo ra sự thay đổi chu kỳ ở các mép vùng năng lượng. Trong tinh thể n-i-p-i, thế siêu mạng pha tạp $V_{sc}(z)$ bao gồm ba phần [18]:

$$V_{sc}(z) = V_H(z) + V_x(z) + V_i(z) \quad (1.16)$$

ở đây, $V_H(z)$ là thế Hartree do các hạt tải dòng linh động có nồng độ là $n(z)$ đóng góp vào thế siêu mạng [18]:

$$V_H(z) = \frac{4\pi e^2}{\chi_0} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' [-n(z'') + p(z'')] \quad (1.17)$$

$V_x(z)$, đóng góp tương quan trao đổi vào thế siêu mạng; $V_i(z)$ là thế do các tâm tạp chất acceptor và donor bị ion hóa. $V_i(z)$ được xác định bởi nghiệm phương trình Poisson:

$$\frac{d^2 V_i(z)}{dz^2} = \frac{4\pi e^2}{\chi_0} [n_D(z) - n_A(z)] \quad (1.18)$$

trong đó, $n_{D(A)}(z)$ là hàm phân bố donor (acceptor). Với điều kiện biên ($z=0$ ứng với tâm lớp n), ta có:

$$\left. \frac{dV_i(0)}{dz} \right|_{z=0} = V_i(0) \quad (1.19)$$

Nếu sự pha tạp là đồng nhất, nghĩa là $n_{D(A)}(z)$ không phụ thuộc vào z , lúc đó $V_i(z)$ có dạng hàm bậc hai trong vùng pha tạp, và:

$$V_i(z) = \frac{2\pi e^2 n_D}{\chi_0} z^2 \text{ khi } |z| \leq \frac{d_n}{2} \quad (1.20)$$

$$V_i(z) = 2V_0 - \frac{2\pi e^2 n_A}{\chi_0} \left(\frac{d}{2} - |z| \right)^2 \text{ khi } \left(\frac{d}{2} - |z| \right)^2 \leq \frac{d_p^2}{2}$$

và tuyến tính trong vùng không pha tạp: $V_i(z) = \frac{2\pi e^2 n_D d_n}{\chi_0} \left(|z| - \frac{d_n}{4} \right)$

khi $\frac{d_n}{2} \leq |z| \leq \left(d - \frac{d_p}{2} \right)$ ở đây V_o là biên độ của $V_i(z)$, và:

$$V_o = \frac{\pi e^2}{\chi_0} \left(\frac{n_D d_n^2}{4} + \frac{n_A d_p^2}{4} + n_D d_n d_i \right) \quad (1.21)$$

$d_{n(p,i)}$ là độ dày lớp $n(p,i)$. Phương trình Schrodinger được giải trong trường này:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{sc}(z) \right) \varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = \varepsilon_n(\vec{k}) \varphi_{n,\vec{k}}(\vec{r}) \quad (1.22)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$. Nếu bỏ qua sự chồng chéo của các vùng năng lượng khác nhau do thế $V_{sc}(z)$, phương trình (1.22) có nghiệm:

$$\varphi_{i,n,\vec{k}}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp) u_{i,n}(\vec{r}) \psi_{i,n,k_z}(z) \quad (1.23)$$

trong đó $u_{i,n}(\vec{r})$ là hàm Bloch và $\psi_{i,n,k_z}(z)$ là hàm bao của vùng năng lượng thứ (i, n) , mini vùng thứ n , $\vec{r}_\perp = (x, y)$ và:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{sc}(z) \right) \psi_{n,k_z}(z) = \varepsilon_n(k_z) \psi_{n,k_z}(z) \quad (1.24)$$

$$\varepsilon_n(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m^*} + \varepsilon_n(k_z) \quad (1.25)$$

Như vậy, đối với một giá trị xác định $\vec{k}_\perp$, đường cong tán sắc $\varepsilon_n(k_z)$ của siêu mạng pha tạp chia thành các vùng năng lượng mini $\varepsilon_n(k_z)$ và [18]:

$$\varepsilon_n(k_z) = \varepsilon_n = \hbar\omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.26)$$

ở đây, $\psi_{n,k_z}(z)$ là hàm riêng; ε_n là trị riêng trong một hố lượng tử biệt lập; N_1 là số chu kỳ siêu mạng hợp phần; $\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_D}{\varepsilon_0 m^*} \right)^{1/2}$ là tần số plasma gây bởi các tạp chất donor với nồng độ pha tạp n_D . ε_0 là hằng số điện môi. Như vậy, hàm sóng của điện tử trong mini vùng n là tổ hợp của hàm sóng theo mặt phẳng (x, y) và hàm sóng theo phương trục siêu mạng (có dạng hàm Block):

$$\varphi_{n,\vec{k}}(r) = \exp(i\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp) u_n(r) \sum_{m=1}^{N_1} \exp(ik_z md) \psi_n(z - md) \quad (1.27)$$

Đối với phonon, cũng tương tự như siêu mạng hợp phần chúng ta có hệ số tương tác điện tử phonon và hệ số dạng điện tử lần lượt như sau [18, 19]:

$$|C_{m,\vec{q}_\perp}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_0 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \frac{1}{q_\perp^2 + q_z^2} \quad \text{với phonon quang;}$$

$$|C_{m,\vec{q}_\perp}|^2 = \frac{\hbar \xi^2}{2V \rho v_s} \sqrt{\vec{q}_\perp^2 + q_z^2} \quad \text{với phonon âm} \quad (1.28)$$

$$I_m^m = \sum_j^{N_1} \int_0^d e^{iq_z z} \Phi_n(z - jd) \Phi_n(z - jd) dz \quad (1.29)$$

1.2.1.3. Hố lượng tử

Hố lượng tử (quantum wells) là vật liệu bán dẫn mà điện tử của hệ có cấu trúc chuẩn hai chiều. Hố lượng tử được cấu tạo từ một lớp mỏng chất bán dẫn này đặt giữa hai lớp chất bán dẫn khác. Sự khác biệt của các cực tiểu vùng dẫn của hai chất bán dẫn tạo nên một hố lượng tử (hố thế năng). Các hạt tải nằm trong mỗi lớp chất bán dẫn này không thể xuyên qua mặt phân cách để đi đến các lớp bán dẫn bên cạnh (không có

hiệu ứng đường hầm). Do vậy, trong cấu trúc hố lượng tử, hạt tải bị định xứ mạnh, chúng bị cách li lẫn nhau bởi các hố thế lượng tử hai chiều mà thực chất là trong các lớp mỏng của bán dẫn vùng cấm hẹp. Các điện tử trong các hố thế khác nhau không thể tương tác được với nhau. Đặc điểm chung của các hệ điện tử trong cấu trúc hố lượng tử là chuyển động của điện tử theo một hướng nào đó (thường chọn là hướng z) bị giới hạn rất mạnh. Sự giới hạn này là do điện tử bị giam giữ trong các hố thế năng tạo ra bởi mặt dị tiếp xúc giữa hai loại bán dẫn có độ rộng vùng cấm khác nhau. Chuyển động của điện tử theo hướng z lúc đó bị lượng tử hóa, chỉ còn chuyển động tự do trên mặt phẳng xy . Nếu nhiệt độ và nồng độ khí điện tử không quá cao thì các quá trình tán xạ điện tử (bởi các phonon hoặc tạp chất) xảy ra trong cấu trúc này chủ yếu là các quá trình đàn hồi hoặc chuẩn đàn hồi. Trong đó, chỉ có thành phần xung lượng P_x, P_y của điện tử biến đổi, còn giá trị của số lượng tử theo hướng z vẫn giữ nguyên. Tức là, các điện tử thể hiện như một hệ hai chiều thực sự và hệ điện tử khi đó gọi là hệ điện tử chuẩn hai chiều. Hàm sóng của điện tử bị phản xạ mạnh tại các thành hố, do đó phổ năng lượng của điện tử bị lượng tử hoá, các giá trị xung lượng được phép của điện tử theo chiều vuông góc với dị tiếp xúc cũng bị giới hạn. Nhờ vào hiệu ứng lượng tử quan trọng này (sự lượng tử hoá năng lượng của điện tử) mà người ta có thể điều chỉnh hoặc tối ưu hoá (bằng cách lựa chọn độ rộng hoặc độ sâu hố thế của vật liệu) vào các mục đích ứng dụng cụ thể hoặc để điều khiển chính xác các dịch chuyển của điện tử trong các thiết bị kiểu transistor. Một tính chất quan trọng xuất hiện trong hố lượng tử, đó là mật độ trạng thái điện tử thay đổi so với các vật liệu bán dẫn khác. Cụ thể, ở hệ ba chiều, mật độ trạng thái bắt đầu từ giá trị 0 và tăng theo quy luật $\varepsilon^{1/2}$ (ε là năng lượng của điện tử). Nhưng đối với hố lượng tử, mật độ trạng thái không phụ thuộc vào ε [1-3, 28, 29, 30, 31, 32]. Còn đối với hệ một chiều, mật độ trạng thái lại tỷ lệ với $\varepsilon^{-1/2}$ [1-3, 29, 32]. Vì các dịch chuyển điện tử phụ thuộc vào mật độ trạng thái (hoặc trạng thái đầu hoặc trạng thái cuối), nên các dịch chuyển sẽ được mở rộng do mật độ trạng thái khác không tại cực tiểu vùng năng lượng. Chính vì vậy, sự thay đổi mật độ trạng thái trong cấu trúc hố lượng tử có đóng góp quan

trọng trong các laser bán dẫn hố lượng tử. Với các cặp bán dẫn như Ge/GaAs, AlAs/GaAs, InAs/GaSb [17,18, 23, 24, 25, 26, 27], cấu trúc hố lượng tử được coi là có chất lượng tốt.

Theo cơ học lượng tử, chuyển động của điện tử trong hố thế bị lượng tử hóa; năng lượng của điện tử được đặc trưng bởi một số lượng tử n nào đó ε_n ($n=1,2,\dots$). Chuyển động của điện tử trong mặt phẳng xy là tự do, phổ năng lượng của chúng có dạng parabol thông thường:

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2), \text{ với } k_x, k_y \text{ là các thành phần của vector sóng của điện}$$

tử theo các hướng x, y . Vì vậy, phổ năng lượng tổng cộng của điện tử trong cấu trúc hố lượng tử có dạng: $\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_{\perp}$. Để quan sát được các hiệu ứng của điện tử trong hố thế thì khoảng cách giữa hai mức năng lượng liên tiếp phải đủ lớn. Trước hết, giá trị này phải lớn hơn đáng kể năng lượng chuyển động nhiệt của hạt dẫn: $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \gg k_B T$. Trường

hợp ngược lại, sự lấp đầy hầu hết các mức lân cận và các chuyển mức của điện tử thường xảy ra giữa chúng cũng ngăn cản sự quan sát các hiệu ứng lượng tử. Nếu khí điện tử suy biến và có mức năng lượng fermi E_f , muốn quan sát được các hiệu ứng lượng tử cần có điều kiện sau: $E_2 > E_f > E_1$. Trong trường hợp giới hạn ngược lại, khi

$E_f \gg E_{n+1} - E_n$, về nguyên tắc có thể quan sát được hiệu ứng lượng tử

hoá do giảm kích thước, nhưng biên độ thu được rất nhỏ. Trong các vật liệu thực tế, hạt dẫn luôn bị tán xạ bởi tạp chất, phonon, ... Xác suất tán xạ được đặc trưng bởi thời gian hồi phục xung lượng τ (τ là thời gian sống trung bình của hạt dẫn ở trạng thái lượng tử với bộ ba số lượng tử xác định đã cho (n, p_x, p_y)). Theo nguyên lý bất định, giá trị hữu hạn của τ gây ra trong việc xác định năng lượng ở trạng thái đã cho sai số vào

cỡ $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau}$. Tuy nhiên, việc tính toán dựa trên cơ sở các mức năng

lượng gián đoạn phân cách nhau trong hệ đang xét chỉ có nghĩa khi khoảng cách giữa hai mức năng lượng liên tiếp thoả mãn:

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \gg \frac{\hbar}{\tau} = \frac{e\hbar}{m^* \mu} \quad (1.30)$$

$\mu = \frac{e\tau}{m^*}$ là độ linh động của hạt dẫn; e là điện tích hiệu dụng của điện tử.

Để nghiên cứu các hiệu ứng động trong hố lượng tử, có thể sử dụng mô hình lý tưởng hóa hố thế chữ nhật với các mức năng lượng gián đoạn của điện tử và chiều cao của hố thế có thành cao vô hạn. Giải phương trình Schrodinger cho điện tử chuyển động trong hố thế này, thu được hàm sóng và phổ năng lượng có dạng:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0 e^{ik_{\perp} r_{\perp}} \sin(k_z z); \quad k_{\perp} \equiv (k_x, k_y); \quad k_z \equiv \frac{n\pi}{L} \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_n(k_{\perp}) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_{\perp}^2 + k_z^2) \quad (1.32)$$

Trong các biểu thức (1.31) và (1.32), ψ_0 là hằng số chuẩn hoá; $\vec{r}_{\perp}$ là vector bán kính của điện tử trên mặt x, y ; $\vec{k}_{\perp}$ là vector xung lượng của điện tử trên mặt xy ; $k_z \equiv \frac{n\pi}{L}$ là ký hiệu thành phần dọc theo trục Oz của vector sóng điện tử trong một vùng con, n nhận các giá trị gián đoạn ($n=1, 2, \dots$); L là độ rộng hố lượng tử. Như vậy, dọc theo trục k_z của mạng đảo, điện tử bị giam cầm trong hố lượng tử chỉ nhận các giá trị năng lượng gián đoạn. Do đó, trong cùng một vùng năng lượng xuất hiện các vùng con (subband). Sự gián đoạn của phổ năng lượng điện tử là nét đặc trưng nhất của điện tử bị giam cầm trong các hệ bán dẫn thấp chiều nói chung và hố lượng tử nói riêng.

Trường hợp có từ trường đều $\vec{B}$ hướng theo trục z ($\vec{B} // Oz$) tức là vuông góc với thành hố, chuyển động của điện tử trong mặt phẳng x, y cũng bị lượng tử hoá. Chọn thế vector $\vec{A} = (0, \vec{B}, 0)$, khối lượng hiệu dụng đẳng hướng ($m_{\perp}^* = m_z^* = m^*$), sử dụng thang Landau và trong trường hợp sóng điện tử có biên độ yếu, hàm sóng và phổ năng lượng của điện tử có dạng [16, 33, 34]:

$$\psi_{n,k_{\perp}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{L_y L}} \psi_N(x - x_o) e^{ik_y y} \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) \quad (1.33)$$

$$E_{n,N}(k_{\perp}) = \left(N + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} n^2; \quad (1.34)$$

ở đó, $\omega_c = \frac{eB}{cm^*}$ là tần số cyclotron; $N = 0, 1, 2, \dots$ là chỉ số mức phân vùng Landau; $\psi_N(x)$ là hàm sóng của dao động tử điều hoà; $x_o = -\hbar k_y / (m^* \omega_c) = -c \hbar k_y / (eB)$ là vị trí tâm quỹ đạo; L_y là độ dài chuẩn hoá theo hướng Oy.

Đối với phonon trong hố lượng tử ta có [19, 24, 35]:

$$|C_{m,\bar{q}_{\perp}}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{m,\bar{q}_{\perp}}}{\epsilon_o V} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_o} \right) \frac{1}{q_{\perp}^2 + q_z^2};$$

$$q_z \equiv \frac{m\pi}{L} \text{ với phonon quang;}$$

$$|C_{m,\bar{q}_{\perp}}|^2 = \frac{\hbar \xi^2}{2V \rho v_s} \sqrt{\bar{q}_{\perp}^2 + q_z^2} \text{ với phonon âm} \quad (1.35)$$

$$I_{n,n'}^m = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\eta(m) \cos \frac{m\pi z}{L} + \eta(m+1) \sin \frac{m\pi z}{L} \right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{n'\pi z}{L}\right) dz \quad (1.36)$$

với $\eta(m)=1$ nếu m chẵn, $\eta(m)=0$ nếu m lẻ.

1.2.2. Sự giam cầm điện tử, giam cầm phonon trong bán dẫn một chiều

Bán dẫn một chiều là hệ vật liệu mà chuyển động của điện tử trong hệ bị giới hạn theo hai chiều, và chuyển động tự do theo chiều còn lại trong không gian mạng tinh thể. Dây lượng tử là một ví dụ về hệ khí điện tử một chiều. Dây lượng tử có thể được chế tạo nhờ phương pháp epitaxy, hoặc kết tủa hoá hữu cơ kim loại. Một cách chế tạo khác là sử

dụng các cổng (gates) trên một transistor hiệu ứng trường. Phổ năng lượng và hàm sóng điện tử trong dây lượng tử có thể tìm được nhờ giải phương trình Schrodinger một điện tử cho hệ một chiều:

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V(\vec{r}) + U(\vec{r}) \right) \psi = E\psi \quad (1.37)$$

ở đây, $V(\vec{r})$ là thế năng giam giữ điện tử do giam kích thước; $U(\vec{r})$ là thế năng tương tác giữa các điện tử. Trong các bài toán kinh điển chúng ta đã quen thuộc với $U(\vec{r})$. Mục này, chúng ta sẽ đưa ra biểu thức hàm sóng và phổ năng lượng của dây lượng tử với các thế năng $V(\vec{r})$ khác nhau.

1.2.2.1. Dây lượng tử hình trụ thế cao vô hạn

Xét bài toán với dây lượng tử có bán kính R , thế giam giữ điện tử $V(\vec{r})$ của dây có đặc điểm: $V(\vec{r}) = 0$ nếu ở trong dây ($r < R$) và $V(\vec{r}) = \infty$ nếu ngoài dây ($r > R$). Với thế năng này, hàm sóng và phổ năng lượng trong hệ tọa độ trụ (r, ϕ, z) được xác định theo [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]:

$$\psi_{n,l,\vec{k}}(\vec{r}, \phi, z) = 0 \text{ nếu } r > R \quad (1.38)$$

$$\psi_{n,l,\vec{k}}(\vec{r}, \phi, z) = \frac{1}{\sqrt{V_0}} e^{in\phi} e^{i\vec{k}z} \psi_{n,l}(\vec{r}) \text{ nếu } r < R. \quad (1.39)$$

ở đây, $V_0 = \pi R^2 L_z$ là thể tích dây lượng tử; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ là các số lượng tử phương vị; $l = 1, 2, \dots$ là các số lượng tử xuyên tâm; $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ là vector sóng của điện tử; $\psi_{n,l}(\vec{r})$ là hàm sóng xuyên tâm của điện tử chuyển động trong mặt phẳng xOy:

$$\psi_{n,l}(\vec{r}) = \frac{1}{J_{n+1}(B_{n,l})} J_n\left(B_{n,l} \frac{r}{R}\right) \quad (1.40)$$

$B_{n,l}$ là nghiệm thứ l của hàm Bessel cấp n tương ứng với phương trình $J_n(B_{n,l}) = 0$, ví dụ $B_{0,1} = 2,405$; $B_{1,1} = 3,832$. Như đã biết, trong dây lượng tử, chuyển động của điện tử bị giới hạn trong mặt phẳng x, y và năng lượng của nó theo các phương này bị lượng tử hoá. Phổ năng lượng của điện tử có dạng:

$$E_{n,l}(\vec{k}) = E(k_z) + E_{n,l} \quad (1.41)$$

trong đó, $E(k_z) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}$ là động năng theo trục z của điện tử (phương

chuyển động tự do của điện tử); $E_{n,l} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{B_{n,l}^2}{R^2}$ là năng lượng gián

đoạn theo các phương còn lại. Thừa số dạng đặc trưng cho sự giam cầm của điện tử trong dây lượng tử hình trụ có dạng [1, 43]:

$$I_{n,l,n',l'}^{h,j}(q_{h,j}) = \frac{2}{R^2} \int_0^R J_{|n-n'|}(q_{h,j}R) \psi_{n,l}^*(r) \psi_{n',l'}(r) r dr \quad (1.42)$$

Do sự phức tạp của hàm sóng xuyên tâm, nên không thể tính giải tích tường minh đối với tích phân (1.42). Tuy nhiên, theo [39, 40, 41], nếu chỉ quan tâm đến các trạng thái cơ bản của điện tử thì tích phân này có thể tính được nhờ áp dụng gần đúng hàm sóng và năng lượng của điện tử ở các trạng thái này như sau:

$$\psi_{0,1} \approx \sqrt{3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad \psi_{\pm 1,1} \approx \sqrt{12} \left(\frac{r}{R} - \frac{r^3}{R^3} \right),$$

thu được biểu thức cho thừa số dạng:

$$I_{0,1,0,1}(q) \approx \frac{24 J_3(qR)}{(qR)^3}; \quad I_{\pm 0,1,0,1}(q) \approx \frac{48 J_4(qR)}{(qR)^3}$$

Đối với phonon, cũng chịu tác động của hiệu ứng giam kích thước dẫn đến vector sóng và năng lượng cũng bị lượng tử hóa [43, 44]:

$$\omega_{h,j,\vec{q}_z}^2 = \omega_0^2 - \beta^2 (q_z^2 + q_{h,j}^2)$$

$$q_{h,j} = \begin{cases} x_j^1 / R & \text{ khi } h = 0 \\ h_j^h / R & \text{ khi } |h| = 2s + 1; s = 0, 1, 2, \dots \\ g_j^h / R & \text{ khi } |h| = 2s; s = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

1.2.2.2. Dây lượng tử hình trụ với hố thế parabol

Giả sử hố thế giam giữ dạng parabol đối xứng trong mặt phẳng xOy:

$$V = \frac{1}{2} m^* \omega_o^2 R^2 \quad (1.43)$$

ω_o là tần số hiệu dụng của hố thế. Hàm sóng và phổ năng lượng thu được trực tiếp từ việc giải phương trình Schrodinger:

$$\psi_{n,l}(r) = \frac{e^{i\vec{k}_z \cdot \vec{r}}}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2n!}{(n+|l|)!}} \frac{1}{a_o} e^{-\frac{r^2}{2a_o^2}} \left(\frac{r}{a_o}\right)^{|l|} L_n^{|l|}\left(\frac{r^2}{a_o^2}\right) \quad (1.44)$$

$$E_{n,l}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m^*} + \hbar \omega_o (2n + |l| + 1) \quad (1.45)$$

trong đó, $a_o = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega_o}}$; $L_n^{|l|}$ là đa thức Lagrange tổng quát. Khi đó thừa số dạng của điện tử được xác định theo biểu thức [1, 44]:

$$I_{n,l,n',l'}(\vec{q}_z) = \frac{2}{R^2} \int_0^R \psi_{n,l}(r) e^{iq_z r} \psi_{n',l'}^*(r) r dr$$

Các phonon trong dây lượng tử chỉ dao động theo một chiều duy nhất, và bị giới hạn trong hai chiều còn lại. Chính vì vậy vector sóng và năng lượng của phonon bị lượng tử hóa:

$$\hbar \omega_{h,j,\vec{q}_z} = \hbar \omega_o - v_s \left[\left(\frac{\hbar \pi}{R} \right)^2 + \left(\frac{j \pi}{R} \right)^2 \right];$$

$$\vec{q} = \vec{q}_x + \vec{q}_y + \vec{q}_z; q_x = \frac{\hbar \pi}{R}; q_y = \frac{\hbar \pi}{R};$$

1.2.2.3. Dây lượng tử hình chữ nhật với hố thế cao vô hạn

Do yêu cầu thực nghiệm, mô hình dây lượng tử hình chữ nhật cũng hay được đề cập đến trong các công trình mang tính lý thuyết. Với mô hình dây lượng tử hình chữ nhật có các kích thước ba trục được giả thiết lần lượt là L_x, L_y, L_z và $L_z \gg L_x, L_y$. Giả sử thế giam cầm điện tử cao vô hạn theo hai hướng vuông góc x, y ; $V = 0$, nếu $0 \leq y \leq L_y$; $0 \leq x \leq L_x$ và $V = \infty$ nếu ngược lại. Khi đó hàm sóng có thể viết [39, 40, 41]:

$$\psi_{n,l,\bar{k}}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{L_z}} e^{i\bar{k}z} \sqrt{\frac{1}{L_x}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin\left(\frac{l\pi y}{L_y}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq L_x \\ 0 \leq y \leq L_y \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\text{và } \psi_{n,l,\bar{k}}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0; & x \geq L_x \\ y < 0; & y \geq L_y \end{cases} \quad (1.47)$$

Phổ năng lượng của điện tử:

$$E_{n,l}(\bar{k}) = \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m^*} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^*} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{l^2}{L_y^2} \right) \quad (1.48)$$

trong đó, n và l là các số lượng tử của hai phương bị lượng tử hoá x và y . Thừa số dạng điện tử có dạng [1, 39, 40, 41]:

$$I_{n,l,n',l'} = \frac{32\pi^4 (q_x L_x n n')^2 \left(1 - (-1)^{n+n'} \cos(q_x L_x) \right)}{\left[(q_x L_x)^4 - 2\pi^2 (q_x L_x)^2 (n^2 + n'^2) + \pi^4 (n^2 - n'^2)^2 \right]^2} \times \\ \times \frac{32\pi^4 (q_y L_y l l')^2 \left(1 - (-1)^{l+l'} \cos(q_y L_y) \right)}{\left[(q_y L_y)^4 - 2\pi^2 (q_y L_y)^2 (l^2 + l'^2) + \pi^4 (l^2 - l'^2)^2 \right]^2} \quad (1.49)$$

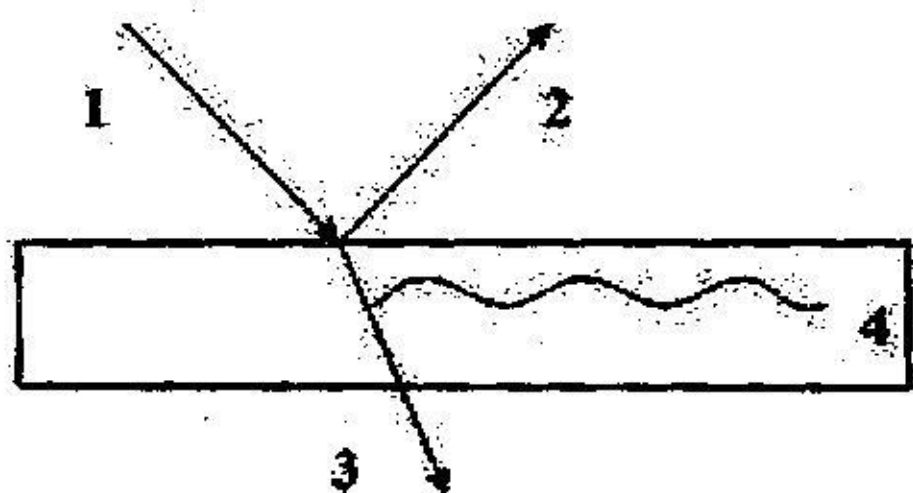
1.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG TỬ CHO ĐIỆN TỬ TRONG LÝ THUYẾT HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH TRONG BÁN DẪN KHỐI

Trong mục này chúng ta trình bày tổng quan về bài toán hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh. Tiếp theo đó, chúng ta sẽ xây dựng phương trình động lượng tử cho electron dựa trên Hamiltonian của hệ electron - phonon trong bán dẫn khối khi có mặt của sóng điện tử với vector cường độ điện trường $\vec{E}$ và thế vector $\vec{A}(t)$. Từ đó thiết lập biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong bán dẫn khối.

1.3.1. Hấp thụ sóng điện tử trong bán dẫn khối

Việc nghiên cứu hiệu ứng động của bán dẫn nói chung, cấu trúc hệ thấp chiều nói riêng cho ta nhiều thông tin có giá trị về tính chất và các hiệu ứng của hệ điện tử trong hệ bán dẫn thấp chiều. Một trong những hiệu ứng động được các nhà vật lý lý thuyết cũng như thực nghiệm quan tâm nghiên cứu đó là, độ dẫn cao tần của bán dẫn và sự hấp thụ sóng điện tử trong các hệ vật liệu bán dẫn. Khi chiếu một chùm bức xạ laser (sóng điện tử mạnh) vào tinh thể bán dẫn, một phần bức xạ bị phản xạ trở lại, một phần được truyền qua và phần còn lại được hấp thụ bởi tinh thể bán dẫn (hình 1.3).

Ngay từ những thập niên cuối của thế kỷ trước, trên quan điểm cổ điển, dựa vào phương trình động học Boltzmann, độ dẫn cao tần đã được quan tâm nghiên cứu rộng rãi [19, 25, 45, 46, 47]. Trong các công trình đó, bài toán vật lý được giới hạn trong miền tần số cổ điển (nhiệt độ cao), với giả thiết thời gian phục hồi xung lượng trung bình τ của điện tử không phụ thuộc vào tần số ω của sóng điện tử. Sự khác nhau giữa sóng truyền trong chân không và truyền trong vật rắn thể hiện qua hằng số điện môi ϵ_0 và độ dẫn điện σ . Hằng số điện môi ϵ_0 cho phép xác định gián tiếp độ xê dịch của dòng hạt tải; độ dẫn điện σ xác định khả năng của dòng thực mà điện trường gây ra.



Hình 1.3: Tương tác giữa vật chất và sóng điện từ, (1) sóng tới, (2) sóng phản xạ, (3) sóng truyền qua, (4) sóng hấp thụ

Phổ hấp thụ của bán dẫn rất phức tạp, gồm ba phần chính sau: chuyển dịch trực tiếp từ vùng dẫn lên vùng hóa trị; chuyển dịch gián tiếp giữa vùng dẫn và vùng hóa trị và chuyển dịch nội vùng [1-7, 9, 10, 48, 49]. Sự hấp thụ do chuyển dịch trực tiếp giữa vùng dẫn và vùng hóa trị xuất hiện khi điện tử vùng hóa trị hấp thụ một photon có năng lượng lớn hơn độ rộng vùng cấm và chuyển dịch lên vùng dẫn với vector sóng $\vec{k}$ gần như không thay đổi (do vector sóng của photon coi là rất nhỏ). Khi đó, tại vùng hóa trị xuất hiện vector sóng $-\vec{k}$. Sự hấp thụ này xảy ra đối với những chất bán dẫn có khe vùng cấm như InSb, InAs, GaAs, GaSb. Hai loại hấp thụ do chuyển dịch trực tiếp và gián tiếp của điện tử từ vùng hóa trị lên vùng dẫn có thể được tính trực tiếp bằng lý thuyết nhiễu loạn phụ thuộc thời gian [1-7, 48]. Tuy nhiên, có thể sử dụng biểu thức của tensor độ dẫn điện để tính những chuyển dịch loại này. Hệ số hấp thụ sóng điện từ chỉ phụ thuộc vào phần thực của tensor độ dẫn điện. Khi không xét tới tương tác điện tử - phonon cũng như bỏ qua các tương tác khác, biểu thức phần thực độ dẫn điện có dạng giống như quy tắc Fermi:

$$\text{Re} \sigma_{xx} = \frac{\pi}{\omega} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} \left| \langle m | H | n \rangle \right|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega) \quad (1.50)$$

Sự hấp thụ do chuyển dịch nội vùng: ngoài các chuyển dịch giữa các vùng dẫn ở trên, sự hấp thụ sóng điện từ còn phụ thuộc vào chuyển dịch nội vùng, được thể hiện khi tần số sóng điện từ nhỏ hơn độ rộng vùng cấm hoặc nếu như trong cùng một vùng năng lượng của kim loại hay bán dẫn tồn tại các trạng thái lấp đầy và các trạng thái không lấp đầy. Sự hấp thụ do chuyển dịch nội vùng là sự hấp thụ mà các điện tích tự do hấp thụ hoặc bức xạ phonon liên tục để có thể chuyển dịch từ trạng thái này sang trạng thái khác. Do đó, có thể coi chuyển dịch loại này là chuyển dịch liên tục giữa các trạng thái kế tiếp nhau [6, 15, 50]. Ngoài các chuyển dịch nội vùng do tương tác điện tử-phonon, điện tử tự do có thể chuyển dịch giữa các trạng thái do các tương tác khác như tương tác điện tử-ion nút mạng, điện tử-tạp chất,... [45, 46, 19, 24, 25, 47], trong đó tương tác điện tử - phonon có đóng góp đáng kể nhất đối với chuyển dịch của điện tử tự do.

Như đã phân tích ở trên, dù là hấp thụ do chuyển dịch giữa các vùng dẫn và vùng hóa trị hay hấp thụ do dịch chuyển nội vùng thì tương tác giữa hạt tải và phonon có đóng góp đáng kể nhất đối với sự dịch chuyển của các hạt tải tự do. Điều này có nghĩa là khi điện tử chuyển động trong mạng tinh thể của bán dẫn chịu ảnh hưởng của sóng điện từ theo hướng làm tăng tốc, đồng thời chịu ảnh hưởng của dao động mạng tinh thể theo hướng cản trở chuyển động. Với giả thiết, điện trường biến thiên mạnh là sóng điện từ phẳng và sự truyền sóng điện từ này dọc theo trục (giả thiết Oz) có cường độ sóng điện từ giảm dần. Đại lượng đặc trưng cho quá trình giảm cường độ của sóng điện từ khi đi sâu vào trong bán dẫn gọi là hệ số hấp thụ sóng điện từ, ký hiệu $\alpha_z(\omega)$, có dạng [1-7, 17, 19, 24, 25, 47, 51]

$$\alpha_z(\omega) = \left(\frac{4\pi}{cN^*} \right) \text{Re} \sigma_z(\omega) \quad (1.51)$$

ở đây, N^* là chiết suất tinh thể; c là vận tốc ánh sáng.

Khảo sát độ dẫn điện của vật liệu và hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh do tương tác điện tử - phonon gây ra là một bài toán mang tính

chất kinh điển nhưng rất quan trọng vì đây là các hiệu ứng xảy ra khi các vật liệu bán dẫn có mặt trong các linh kiện hoạt động. Dưới tác dụng của điện trường và từ trường, độ dẫn điện của hạt dẫn cho ta nhiều thông tin về tính chất chuyển tải lượng tử. Sự chuyển dịch của điện tử giữa vùng dẫn và vùng hoá trị như đã trình bày ở trên có thể được khảo sát nhờ sử dụng lý thuyết phản ứng của hệ dưới tác dụng của trường ngoài (điện trường, từ trường). Hệ số hấp thụ tương ứng với chuyển dịch giữa vùng dẫn và vùng hoá trị là phức tạp, đặc biệt khi xét tới các số hạng bậc cao (sóng điện từ mạnh, tần số cao).

Hệ số hấp thụ sóng điện từ tỷ lệ thuận với $\text{Re } \sigma_z(\omega)$, vì vậy hệ số hấp thụ tuyến tính sóng điện từ không phụ thuộc vào cường độ điện trường $\vec{E}$ (ở đây ta chỉ tính đến số hạng bậc nhất của tensor độ dẫn cao tần). Trong trường hợp sóng điện từ có cường độ mạnh cao tần, đóng góp của số hạng bậc cao vào tensor độ dẫn cao tần là đáng kể và phải được tính đến. Khi đó xuất hiện sự phụ thuộc phi tuyến của tensor độ dẫn cao tần vào cường độ điện trường $\vec{E}_0$ của sóng điện từ. Vì vậy, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ là đại lượng phụ thuộc phi tuyến vào cường độ điện trường $\vec{E}_0$. Lý thuyết hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong bán dẫn khối đã được V. V. Pavlovich và E. M. Epshtein nghiên cứu và công bố vào năm 1977 [52], được biết đến là phương pháp phương trình động lượng tử cho điện tử.

1.3.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong bán dẫn khối

Trong phần này, chúng ta giới thiệu tổng quát về tính chất quang phi tuyến của bán dẫn khối (hay giới thiệu về lý thuyết lượng tử). Trước hết, ta xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử trong bán dẫn khối khi có mặt trường sóng điện từ mạnh. Hamiltonian của hệ điện tử-phonon quang) trong bán dẫn khối:

$$H = \sum_{\vec{k}} \varepsilon \left(\vec{k} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}, \vec{k}} C_{\vec{q}} a_{\vec{k}+\vec{q}}^+ a_{\vec{k}} (b_{-\vec{q}}^+ + b_{\vec{q}}) \quad (1.52)$$

$\vec{k}$ và $\vec{k} + \vec{q}$ là trạng thái của điện tử trước và sau tán xạ. $\varepsilon(\vec{k})$ là năng lượng của điện tử; $C_{\vec{q}}$ là hằng số tương tác điện tử-phonon quang [14, 36, 53]:

$$|C_{\vec{q}}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_o}{\varepsilon_o q^2} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_o} \right) \quad (1.53)$$

$\vec{A}(t)$ là thế vector của trường điện từ, xác định bởi biểu thức

$$-\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \vec{E}_o \sin(\Omega t) \quad (1.54)$$

Để thiết lập phương trình động lượng tử cho điện tử trong bán dẫn khối, ta sử dụng hàm phân bố lượng tử tổng quát: $\langle \psi \rangle_t = \text{Tr}(\hat{w} \hat{\psi})$, với $\hat{w}$ là toán tử ma trận mật độ, $\langle \psi \rangle_t$ là kí hiệu trung bình thống kê tại thời điểm t , ta có:

$$i\hbar \frac{\partial n_{\vec{k}}(t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} \rangle = \langle [a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}, H] \rangle, \quad (1.55)$$

Sử dụng biểu thức (1.45) và các tính chất của giao hoán tử, sau một số phép biến đổi toán tử, ta được:

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{q}} C_{\vec{q}} \left[F_{\vec{k}+\vec{q}, \vec{k}, \vec{q}}(t) + F_{\vec{k}, \vec{k}+\vec{q}, -\vec{q}}^* - F_{\vec{k}, \vec{k}-\vec{q}, \vec{q}}(t) - F_{\vec{k}-\vec{q}, \vec{k}, -\vec{q}}^* \right] \quad (1.56)$$

trong đó, $F_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}(t) = \langle a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2} b_{\vec{q}} \rangle$. Tương tự như trên, ta thiết lập phương trình cho $F_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}(t)$ và giải phương trình này ta thu được $F_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}(t)$. Thay $F_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}}(t)$ vào (1.56), ta thu được phương trình động lượng tử cho điện tử trong bán dẫn khối.

$$\frac{\partial n_{\vec{k}}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{s, l=-\infty}^{\infty} J_s \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) J_l \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \exp[-i(s-l)\Omega t] \sum_{\vec{q}} |C_{\vec{q}}|^2 |I_{nn}(\vec{q}_t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k} + \vec{q}) - \varepsilon_n(\vec{k}) - \hbar\omega_o - l\hbar\Omega + i\delta \right) (t - t_1) \right] \times \right. \\
& \times \left[n_{\vec{k}}(t_1) N_{\vec{q}} - n_{\vec{k}+\vec{q}}(t_1) (N_{\vec{q}} + 1) \right] + \left[n_{\vec{k}}(t_1) (N_{\vec{q}} + 1) - n_{\vec{k}+\vec{q}}(t_1) N_{\vec{q}} \right] \times \\
& \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k} + \vec{q}) - \varepsilon_n(\vec{k}) + \hbar\omega_o - l\hbar\Omega + i\delta \right) (t - t_1) \right] \times \\
& - \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}) - \varepsilon_n(\vec{k} - \vec{q}) - \hbar\omega_o - l\hbar\Omega + i\delta \right) (t - t_1) \right] \times \\
& \times \left[n_{\vec{k}-\vec{q}}(t_1) (N_{\vec{q}} + 1) - n_{\vec{k}}(t_1) N_{\vec{q}} \right] - \left[n_{\vec{k}-\vec{q}}(t_1) (N_{\vec{q}} + 1) - n_{\vec{k}}(t_1) N_{\vec{q}} \right] \times \\
& \left. \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}) - \varepsilon_n(\vec{k} - \vec{q}) + \hbar\omega_o - l\hbar\Omega + i\delta \right) (t - t_1) \right] \right\}_{\delta \rightarrow 0} \quad (1.57)
\end{aligned}$$

với $\lambda = \frac{e\vec{E}_o \cdot \vec{q}}{m\Omega}$; E_o , Ω là biên độ điện trường và tần số của sóng điện từ.

Tham số dương vô cùng bé δ đưa vào để đảm bảo giả thiết đoạn nhiệt. Biểu thức (1.57) là phương trình động lượng tử cho điện tử trong bán dẫn khối. Phương trình này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ sóng điện từ trong bán dẫn khối dưới tác dụng của trường laser.

Vector mật độ dòng xác định bởi công thức:

$$\vec{J}(t) = \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{k} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) n_{\vec{k}}(t) \quad (1.58)$$

Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử trong bán dẫn khối được viết dưới dạng quen thuộc [17]:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_\infty} E_o^2} \left\langle \vec{J}(t) \vec{E}_o \sin \Omega t \right\rangle_t = \frac{8\pi^2 \Omega}{c\sqrt{\chi_\infty} E_o^2} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} |C_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}} n_{\vec{k}}(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_l^2 \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \\
& \times \sum_{\vec{k}_1} \left(\bar{n}_{n, \vec{k}_1} - \bar{n}_{n, \vec{k}_1 + \vec{q}_1} \right) \delta \left[\varepsilon(\vec{k} + \vec{q}) - \varepsilon(\vec{k}) + \hbar\omega_o - l\hbar\Omega \right] \quad (1.59)
\end{aligned}$$

Biểu thức (1.59), là biểu thức tổng quát hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong bán dẫn khối. Tiếp theo, ta xét hấp thụ cho hai trường hợp giới hạn gần ngưỡng và xa ngưỡng sóng điện từ.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Đối với quá trình này, năng lượng của trường điện từ ngoài phải thỏa mãn điều kiện: $|\hbar\Omega - \hbar\omega_o| \ll \bar{\epsilon}$ ($\bar{\epsilon}$ là năng lượng trung bình của chuyển động nhiệt của electron), khi đó:

$$\alpha = \frac{4\pi e^4 n_o (k_B T)^{5/2} m^*}{3c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 \hbar^5} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \left(1 + \frac{3k_B T}{4\hbar(\Omega - \omega_o)} \right) \left(\frac{\Omega - \omega_o}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{3(\Omega - \omega_o) e^2}{20m^* \hbar \Omega^4} \left[1 + \frac{3k_B T}{\hbar(\Omega - \omega_o) + \frac{3k_B T}{4}} E_o^2 \right] \right\} \quad (1.60)$$

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này phải có điều kiện: $|\hbar\Omega - \hbar\omega_o| \gg \bar{\epsilon}$, khi đó:

$$\alpha = \frac{16\pi e^4 f_o k_B T}{3c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 \hbar^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) (\Omega - \omega_o) \left(1 + \frac{3(\Omega - \omega_o) e^2 E_o^2}{20m^* \hbar \Omega^4} \right) \quad (1.61)$$

Như vậy, từ hàm phân bố không cân bằng của điện tử, ta tính được mật độ dòng của điện tử trong bán dẫn khối, từ đó thu được biểu thức của hệ số hấp thụ sóng điện từ trong bán dẫn khối phụ thuộc phi tuyến vào cường độ điện trường $\bar{E}_o$ và tần số của sóng điện từ Ω .

CHƯƠNG 2

HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG BÁN DẪN HAI CHIỀU

2.1. HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG SIÊU MẠNG HỢP PHẦN

Hấp thụ *sóng điện từ yếu* bởi điện tử giam cầm trong hệ bán dẫn thấp chiều nói chung và bán dẫn siêu mạng hợp phần nói riêng đã được nghiên cứu bằng nhiều phương pháp khác nhau, như phương pháp Kubo-Mori, phương pháp lý thuyết nhiễu loạn. Để hoàn thiện bức tranh vật lý về sự hấp thụ *sóng điện từ mạnh* trong bán dẫn nói chung, bán dẫn siêu mạng nói riêng, trong mục này chúng ta nghiên cứu bài toán hấp thụ phi tuyến *sóng điện từ mạnh* bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần.

Dưới đây trình bày nghiên cứu hệ số hấp thụ phi tuyến *sóng điện từ mạnh* bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần, có xét tới các trường hợp vắng mặt và có mặt từ trường ngoài với các cơ chế tán xạ điện tử - phonon âm và tán xạ điện tử-phonon quang [12].

2.1.1. Hamiltonian tương tác của hệ điện tử - phonon trong siêu mạng hợp phần

Siêu mạng hợp phần là loại vật liệu bán dẫn có cấu trúc điện tử chuẩn hai chiều. Do đó, phổ năng lượng của điện tử trong siêu mạng hợp phần bị lượng tử hóa. Biểu thức Hamiltonian tương tác của hệ điện tử-phonon trong siêu mạng hợp phần khi có mặt trường sóng điện từ ngoài $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ có dạng:

$$H = \sum_{n, \vec{k}_\perp} \varepsilon_n \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n, \vec{k}_\perp}^+ a_{n, \vec{k}_\perp} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_0 b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}} \sum_{n, n', \vec{k}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n, n'}(q_z) a_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}}^+ a_{n', \vec{k}_\perp} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+) \quad (2.1)$$

$\vec{A}(t)$ là thế vector của trường điện từ xác định bởi biểu thức:

$$-\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t) \quad (2.2)$$

$C_{\vec{q}}$ là hằng số tương tác điện từ - phonon, phụ thuộc vào loại cơ chế tán xạ.

Trường hợp tán xạ điện từ - phonon quang, $C_{\vec{q}}$ có dạng [25, 47, 51, 54]

$$|C_{\vec{q}}|^2 = \frac{1}{V_0} \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_0}{\varepsilon_0 (q_\perp^2 + q_z^2)} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \quad (2.3)$$

Trường hợp tán xạ điện từ - phonon âm, hằng số tương tác điện từ - phonon âm xác định bởi công thức:

$$|D_{\vec{q}}|^2 = \frac{\xi^2 \hbar \omega_{\vec{q}}}{\rho v_s V_0} \quad (2.4)$$

với ρ là mật độ tinh thể; v_s là vận tốc sóng âm; ξ là hằng số thể biến dạng; $I_{n, n'}(q_z)$ là thừa số dạng điện từ trong siêu mạng hợp phần, có dạng:

$$I_{n, n'}(q_z) = \int_0^{N_d} \psi_n^*(z) \psi_{n'}(z) \exp(iq_z z) dz \quad (2.5)$$

trong đó $\psi_n(z)$ là hàm sóng của trạng thái thứ n trong hố thế; d là chu kỳ siêu mạng; N_d là số chu kỳ siêu mạng hợp phần. Phổ năng lượng của điện từ trong siêu mạng hợp phần có dạng [14, 15, 51, 55, 56]:

$$\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m^*} - \Delta_n \cos k_\parallel d \quad (2.6)$$

ε_n là các mức năng lượng trong hố thế biệt lập; Δ_n là độ rộng mini vùng. Trong biểu thức (2.1), nếu thay $C_{\vec{q}}$ bằng $D_{\vec{q}}$ ta được biểu thức Hamiltonian tương tác của hệ điện tử - phonon âm trong siêu mạng hợp phần.

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài:

Giả thiết rằng trường bức xạ laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \Omega t$ đặt vuông góc với trục siêu mạng và từ trường ngoài $\vec{B}$ đặt song song với trục siêu mạng thì Hamiltonian của hệ điện tử phonon - quang tương tác trong biểu diễn lượng tử hóa lần thứ hai có thể viết:

$$H_{\vec{B}} = \sum_{n,N,\vec{k}_{\perp}} \varepsilon_{n,N}^H \left(\vec{k}_{\perp} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n,N,\vec{k}_{\perp}}^+ a_{n,N,\vec{k}_{\perp}} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_0 b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{n,n',N,N'} \sum_{\vec{q},\vec{k}_{\perp}} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) a_{n',N',\vec{k}_{\perp}+\vec{q}_{\perp}}^+ a_{n,N,\vec{k}_{\perp}} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+) \quad (2.7)$$

ở đây, $(n, N, \vec{k}_{\perp})$ và $(n', N', \vec{k}_{\perp} + \vec{q}_{\perp})$ là trạng thái của điện tử trước và sau tán xạ; $a_{n,N,\vec{k}_{\perp}}^+$ và $a_{n,N,\vec{k}_{\perp}}$ là các toán tử sinh hủy điện tử ở trạng thái $(n, N, \vec{k}_{\perp})$; $\vec{q} = (\vec{q}_{\perp}, q_z)$. Phổ năng lượng của điện tử có dạng:

$$\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}) = \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) - \Delta_n \cos k_{\parallel} d \quad (2.8)$$

với $\Omega_B = \frac{eB}{m^*c}$ là tần số cyclotron. Biểu thức $J_{N,N'}(u)$ có dạng:

$$J_{N,N'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} d\vec{r} \varphi_{N'}(\vec{r}_{\perp} - a_c^2 \vec{k}_{\perp} - a_c^2 \vec{q}_{\perp}) \varphi_N(\vec{r}_{\perp} - a_c^2 \vec{k}_{\perp}) \quad (2.9)$$

trong đó, $u = \frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2$; $\vec{r}_{\perp}$ là vector xác định vị trí của điện tử trên mặt

phẳng (x,y); a_c là bán kính quỹ đạo điện tử trong mặt phẳng (x,y); $\varphi_N(x)$ là hàm điều hòa.

2.1.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần

Tương tự như cách làm đối với bán dẫn khối, để xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt (hàm phân bố điện tử) $n_{n,\bar{k}_\perp} = \langle a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp} \rangle_t$ [3]:

$$i\hbar \frac{\partial \langle a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp} \rangle_t}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial n_{n,\bar{k}_\perp}}{\partial t} = \langle [a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, H] \rangle_t \quad (2.10)$$

ở đây $\langle \psi \rangle_t$ là trung bình thống kê của toán tử ψ ; $\langle \psi \rangle_t = Tr(\widehat{W}\widehat{\psi})$, ($\widehat{W}$ là toán tử ma trận mật độ). Đặt biểu thức Hamiltonian (2.1) vào (2.10). Các số hạng có trong vế phải (2.10), lần lượt có giá trị như sau:

Số hạng thứ nhất:

$$\left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, \sum_{n,\bar{k}_\perp} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos k_\parallel d + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\bar{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right]^2 \right) a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp} \right] = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Số hạng thứ hai: } \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, \sum_{\bar{q}} \hbar \omega_0 b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} \right] = 0 \quad (2.12)$$

Số hạng thứ ba:

$$\begin{aligned} & \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, \sum_{\bar{q}} \sum_{n',\bar{k}'_\perp} C_{\bar{q}} I_{n,n'}(q_z) a_{n',\bar{k}'_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp} (b_{\bar{q}}^+ + b_{-\bar{q}}^+) \right] = \sum_{n',\bar{k}'_\perp} C_{\bar{q}} I_{n,n'}(q_z) \times \\ & \times \left[(a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n',\bar{k}'_\perp - \bar{q}_\perp} b_{\bar{q}}^+) + (a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n',\bar{k}'_\perp} b_{-\bar{q}}^+) - (a_{n',\bar{k}'_\perp + \bar{q}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp} b_{\bar{q}}^+) - (a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n',\bar{k}'_\perp + \bar{q}_\perp} b_{-\bar{q}}^+) \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{n, \bar{k}_1} C_{\bar{q}} I_{n, n'} \left[F_{n, \bar{k}_1 + \bar{q}_1, n, \bar{k}_1, \bar{q}} + F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_1 + \bar{q}_1, -\bar{q}}^* - F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_1 - \bar{q}_1, \bar{q}} - F_{n, \bar{k}_1 - \bar{q}_1, n, \bar{k}_1, -\bar{q}}^* \right]$$

trong đó, $F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_2, \bar{q}}(t) = \left\langle a_{n, \bar{k}_1}^+ a_{n, \bar{k}_2} b_{\bar{q}}^- \right\rangle_t$. Thay các số hạng tính được vào (2.10), ta được phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_2, \bar{q}}(t)}{\partial t} = & \frac{i}{\hbar} \left[\varepsilon_{n, \bar{k}_1} - \varepsilon_{n, \bar{k}_2} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n_1} d - \cos k_{\parallel}^{n_2} d) - \hbar \omega_0 \right. \\ & \left. - \frac{e\hbar}{m^* c} (\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \bar{A}(t) \right] F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_2, \bar{q}}(t) + \frac{i}{\hbar} \sum_{n_3, \bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \left[I_{n_3, n_3} \left\langle a_{n_3, \bar{k}_1 + \bar{q}_1}^+ a_{n_2, \bar{k}_2} (b_{\bar{q}_1}^- + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}}^- \right\rangle_t \right. \\ & \left. - I_{n_2, n_3} \left\langle a_{n_1, \bar{k}_1}^+ a_{n_3, \bar{k}_2 - \bar{q}_1} b_{\bar{q}}^- (b_{\bar{q}_1}^- + b_{-\bar{q}_1}^+) \right\rangle_t \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Giải (2.13) bằng phương pháp biến thiên hằng số và sử dụng điều kiện đoạn nhiệt $\ln F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_2, \bar{q}}(-\infty) = 0$, thu được kết quả:

$$\begin{aligned} F_{n, \bar{k}_1, n, \bar{k}_2, \bar{q}}(t) = & \frac{i}{\hbar} \sum_{n_3, \bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \left[I_{n_3, n_3} \left\langle a_{n_3, \bar{k}_1 + \bar{q}_1}^+ a_{n_2, \bar{k}_2} (b_{\bar{q}_1}^- + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}}^- \right\rangle_{t_2} \right. \\ & \left. - I_{n_2, n_3} \left\langle a_{n_1, \bar{k}_1}^+ a_{n_3, \bar{k}_2 - \bar{q}_1} b_{\bar{q}}^- (b_{\bar{q}_1}^- + b_{-\bar{q}_1}^+) \right\rangle_{t_2} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n, \bar{k}_1} - \varepsilon_{n, \bar{k}_2} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n_1} d - \cos k_{\parallel}^{n_2} d) \right. \\ & \left. - \hbar \omega_0) (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1 \right] dt_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Từ đây, chúng ta nhận được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n, \bar{k}_1}(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar^2} \sum_{n', \bar{q}_1} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, n'}|^2 \sum_{l, s=-\infty}^{\infty} J_l \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_1}{m^* \Omega^2} \right) J_s \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_1}{m^* \Omega^2} \right) \exp[-i(s-l)\Omega] \int_{-\infty}^t dt' \\ & \times \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n, \bar{k}_1 + \bar{q}_1} - \varepsilon_{n, \bar{k}_1} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n_1} d - \cos k_{\parallel}^{n_2} d) \right. \right. \\ & \left. \left. - \hbar \omega_0 - l\hbar \Omega + i\delta\hbar) (t - t') \right] \left[n_{n, \bar{k}_1}(t') N_{\bar{q}} - n_{n, \bar{k}_1 + \bar{q}_1}(t') (N_{\bar{q}} + 1) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar \right) \right] \\
& \times (t - t') \left[n_{n, \bar{k}_{\perp}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}}(t') N_{\bar{q}} \right] - \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) - \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar \right) \right] (t - t') \left[n_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}}(t') N_{\bar{q}} \right. \\
& \left. - n_{n, \bar{k}_{\perp}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}} - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar \right) \right] (t - t') \left[n_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n, \bar{k}_{\perp}}(t') N_{\bar{q}} \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Biểu thức (2.15) là phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần. Việc giải phương trình (2.15) trong trường hợp tổng quát rất khó khăn và phức tạp. Sử dụng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp [48], chúng ta đặt:

$$n_{n, \bar{k}_{\perp}}(t) \approx \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp}}; n_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}}(t) \approx \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}}; n_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}}(t) \approx \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}}. \tag{2.16}$$

Tích phân hai vế phương trình (2.16) theo t' , sau đó theo t , ta được:

$$\begin{aligned}
n_{n, \bar{k}_{\perp}}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{q, n'} |I_{n, n'}|^2 |C_{\bar{q}}|^2 \sum_{k, l=-\infty}^{+\infty} J_k \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) J_{l+k} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) \frac{\hbar}{l \Omega} \exp(-ik \Omega t) \\
& \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp}} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}} - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) - \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar} \right. \\
& \left. - \frac{\bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp}} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^{n'} d - \cos k_{\parallel}^n d \right) + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} N_{\vec{q}} - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1)}{\varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) - \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar} \\
& + \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1) - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} N_{\vec{q}}}{\varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar} \Bigg\} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

ở đây, $\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp}$ ($N_{\vec{q}} \equiv N_{\vec{q}_\perp}$) là hàm phân bố cân bằng điện tử (phonon).

Phương trình (2.17) là biểu thức giải tích hàm phân bố không cân bằng của điện tử trong siêu mạng hợp phần. Phương trình này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần (trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang). Tiếp theo, từ biểu thức (2.17), chúng ta thiết lập công thức tính hệ số hấp thụ sóng điện tử mạnh trong siêu mạng hợp phần.

- Trường hợp tương tác điện tử - phonon âm

Để xây dựng phương trình động lượng tử và hàm phân bố điện tử không cân bằng cho điện tử cho trường hợp tương tác điện tử-phonon âm, chúng ta thay $C_{\vec{q}}$ trong biểu thức (2.15) và (2.17) bằng $D_{\vec{q}}$. Với cách làm tương tự như trường hợp tương tác điện tử-phonon quang, chúng ta tìm được hàm phân bố không cân bằng điện tử cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm như sau:

$$\begin{aligned}
n_{n, \vec{k}_\perp}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{q}, n'} |I_{n, n'}|^2 |D_{\vec{q}}|^2 \sum_{k, l=-\infty}^{+\infty} J_k \left(\frac{e \bar{E}_0 \vec{q}_\perp}{m \Omega^2} \right) J_{l+k} \left(\frac{e \bar{E}_0 \vec{q}_\perp}{m \Omega^2} \right) \frac{\hbar}{l \Omega} \exp(-il \hbar \Omega t) \\
& \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} N_{\vec{q}} - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1)}{\varepsilon_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n'} d - \cos k_{\parallel}^n d) - \hbar \omega_{\vec{q}} - k \hbar \Omega + i \delta \hbar} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) - \hbar \omega_{\bar{q}} - k \hbar \Omega + i \delta \hbar} \\
& + \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) - \hbar \omega_{\bar{q}} - k \hbar \Omega + i \delta \hbar} \\
& + \left. \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) + \hbar \omega_{\bar{q}} - l \hbar \Omega + i \delta \hbar} \right\} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Phương trình (2.18) là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần ở phần tiếp theo của chương này.

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài:

Tương tự như trường hợp không có từ trường ngoài, khi xây dựng phương trình động lượng tử, chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt (hàm phân bố điện tử):

$$\begin{aligned}
n_{n,N,\bar{k}_\perp} &= \left\langle a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp} \right\rangle_t [3]: \\
i\hbar \frac{\partial \left\langle a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp} \right\rangle_t}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t)}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_{\bar{B}} \right] \right\rangle_t \quad (2.19)
\end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất:

$$\sum_{n,N,\bar{k}_\perp} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos k_{\parallel}^n d + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\bar{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right]^2 \right) \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, a_{n',N',\bar{k}_\perp}^+ a_{n',N',\bar{k}_\perp} \right] = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{Số hạng thứ hai: } \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, \sum_{\bar{q}} \hbar \omega_{\bar{q}} b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} \right] = 0 \quad (2.21)$$

Số hạng thứ ba:

$$\left[a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1}, \sum_{\bar{q}} \sum_{n',N',N,\bar{k}_1} C_{\bar{q}} I_{n,n'}(q_z) a_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}}^+ a_{n,N,\bar{k}_1} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right]$$

$$= \sum_{n',\bar{k}_1} C_{\bar{q}} I_{n,n'} \left[F_{n',\bar{k}_1+\bar{q}_1,n,\bar{k}_1,\bar{q}}(t) + F_{n,\bar{k}_1,n',\bar{k}_1+\bar{q}_1,\bar{q}}^*(t) - F_{n,\bar{k}_1,n,\bar{k}_1-\bar{q}_1,\bar{q}}(t) - F_{n,\bar{k}_1-\bar{q}_1,n,\bar{k}_1,\bar{q}}^*(t) \right] \quad (2.22)$$

trong đó, $F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2}(t) = \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}} \right\rangle_t$. Thay các số hạng tính được vào (2.19), ta được phương trình:

$$\frac{\partial F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2}}{\partial t}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[\varepsilon_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^H - \varepsilon_{n_2,N_2,\bar{k}_2}^H - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n_1} d - \cos k_{\parallel}^{n_2} d) - \hbar \omega_0 \right.$$

$$\left. - \frac{e\hbar}{m^*c} (\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \bar{A}(t) \right] F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2}(t) + \frac{i}{\hbar} \sum_{n_3,N_3,\bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \left[I_{n_1,N_1,n_3,N_3} \left\langle a_{n_3,N_3,\bar{k}_1+\bar{q}_1}^+ \right.$$

$$\left. \times a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_t - I_{n_2,N_2,n_3,N_3} \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_3,N_3,\bar{k}_2-\bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \right\rangle_t \right] \quad (2.23)$$

Giải phương trình (2.23) bằng phương pháp biến thiên hằng số và sử dụng điều kiện đoạn nhiệt $\ln F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(-\infty) = 0$, thu được kết quả:

$$F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2}(t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{n_3,N_3,\bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \left[I_{n_3,N_3,n_3,N_3} \left\langle a_{n_3,N_3,\bar{k}_1+\bar{q}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_{t_2} \right.$$

$$\left. - I_{n_2,N_2,n_3,N_3} \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_3,N_3,\bar{k}_2-\bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \right\rangle_{t_2} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^H - \varepsilon_{n_2,N_2,\bar{k}_2}^H \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n_1} d - \cos k_{\parallel}^{n_2} d) - \hbar \omega_0 \right) (t - t_2) - \frac{ie}{m^*c} \int_{t_2}^t (\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \bar{A}(t_1) dt_1 \right] dt_2 \quad (2.24)$$

Sử dụng tính chất giao hoán tử của các toán tử sinh hủy điện tử (phonon), phương pháp biến thiên hằng số và điều kiện đoạn nhiệt, tính

chất của hàm Bessel trong toán học. Chúng ta thiết lập được phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần khi có từ trường ngoài như sau:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t)}{\partial t} = & \frac{i}{\hbar^2} \sum_{n',N',\bar{q}_\perp} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,n'}|^2 |J_{N,N'}|^2 \sum_{l,s=-\infty}^{\infty} J_l \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) J_s \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \\
 & \times \exp(-il\hbar\Omega) \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \left[n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t') N_{\bar{q}} - n_{n,N',\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp}(t') (N_{\bar{q}}+1) \right] \right. \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \\
 & + \left[n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t') (N_{\bar{q}}+1) - n_{n,N',\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp}(t') N_{\bar{q}} \right] \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \\
 & - \left[n_{n,N',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp}(t') N_{\bar{q}} - n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t') (N_{\bar{q}}+1) \right] \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp}^H - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \\
 & - \left[n_{n,N',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp}(t') (N_{\bar{q}}+1) - n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t') N_{\bar{q}} \right] \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp}^H + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \Big\}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Giải phương trình (2.25) bằng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp, chúng ta tìm được nghiệm của phương trình này như sau:

$$n_{n,N,\bar{k}_\perp}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n',N'} |I_{n,n'}|^2 |C_{\bar{q}}|^2 |J_{N,N'}(\mu)|^2 \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} J_k \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2} \right) J_{l+k} \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2} \right) \frac{\hbar}{l\Omega} \exp(-il\hbar\Omega t)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n',N',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) - \hbar \omega_0 - k \hbar \Omega + i \delta \hbar} \right. \\
& \frac{\bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n',N',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) - \hbar \omega_0 - k \hbar \Omega + i \delta \hbar} \\
& + \frac{\bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \varepsilon_{n',N',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp}^H - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) - \hbar \omega_0 - k \hbar \Omega + i \delta \hbar} \\
& \left. + \frac{\bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n,N,\bar{k}_\perp}^H - \varepsilon_{n',N',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp}^H - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega + i \delta \hbar} \right\} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Biểu thức (2.26) là hàm phân bố điện tử không cân bằng khi hệ đặt trong từ trường ngoài. Biểu thức này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi có từ trường.

2.1.3. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần

Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh được xác định bởi công thức [17, 25, 47, 54]:

$$\alpha = \frac{8\pi}{c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \langle \bar{J}_\perp(t) \bar{E}_0 \sin \Omega t \rangle, \quad (2.27)$$

Mật độ dòng hạt tải:

$$\bar{J}_\perp(t) = \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n,\bar{k}_\perp} \left(\bar{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) n_{n,\bar{k}_\perp} = -\frac{e^2}{m^* c} \sum_{n,\bar{k}_\perp} \bar{A}(t) n_{n,\bar{k}_\perp} + \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n,\bar{k}_\perp} \bar{k}_\perp n_{n,\bar{k}_\perp} \quad (2.28)$$

$$\bar{A}(t) = -\bar{E}_0 c \int \sin(\Omega t) dt = -\frac{\bar{E}_0 c}{\Omega} \cos(\Omega t) \quad (2.29)$$

Đặt $n_0 = \sum_{n, \bar{k}_\perp} \bar{n}_{n, \bar{k}_\perp}$ là mật độ điện tử trong siêu mạng hợp phần, biểu thức vector mật độ dòng được viết lại:

$$\bar{J}_\perp(t) = -\frac{e^2 n_0 \bar{E}_0 \cos(\Omega t)}{m^* \Omega} + \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n, \bar{k}_\perp} \bar{k}_\perp n_{n, \bar{k}_\perp} \quad (2.30)$$

Trong trường hợp vắng mặt từ trường ngoài với cơ chế tán xạ điện tử-phonon quang:

Đặt (2.30) vào (2.27), ta được:

$$\alpha = \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left[\left\langle -\frac{e^2 n_0 \bar{E}_0 \cos(\Omega t)}{m^* \Omega} \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle_t + \frac{e\hbar}{m^*} \left\langle \sum_{n, \bar{k}_\perp} \bar{k}_\perp n_{n, \bar{k}_\perp} \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle_t \right] \quad (2.31)$$

Tính số hạng thứ nhất của (2.31):

$$\left\langle -\frac{e^2 n_0 \bar{E}_0 \cos(\Omega t)}{m^* \Omega} \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle_t = \frac{e^2 n_0 \bar{E}_0^2}{m^* \Omega^2} \int_0^T \sin \Omega t \cos(\Omega t) dt = 0 \quad (2.32)$$

Để tính số hạng thứ hai của (2.31), trước tiên ta tính tổng sau:

$$\begin{aligned} \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n, \bar{k}_\perp} \bar{k}_\perp n_{n, \bar{k}_\perp} &= \frac{e\hbar}{m^* l \Omega} \sum_{l, s=-\infty}^{\infty} \sin(l\Omega t) \sum_{n, \bar{k}_\perp} \pi \bar{k}_\perp \left[J_s \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) + J_{s+1} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \right. \\ &+ J_s \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) J_{s-1} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \left\{ \left[\bar{n}_{n, \bar{k}_\perp} \left(N_{\bar{q}} + 1 \right) - \bar{n}_{n, \bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} \right] \delta \left[\varepsilon_{n, \bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} - \right. \right. \\ &- \varepsilon_{n, \bar{k}_\perp} - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^n d \right) - \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega \left. \right] + \left\{ \left[\bar{n}_{n, \bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n, \bar{k}_\perp} \left(N_{\bar{q}} + 1 \right) \right] \right. \\ &\times \delta \left[\varepsilon_{n, \bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} - \varepsilon_{n, \bar{k}_\perp} - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^n d \right) - \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Đổi biến, $\vec{k}_\perp \rightarrow \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp$; $k \rightarrow -k$ $\vec{q} \rightarrow -\vec{q}$; $n \rightarrow n'$. Chúng ta thu được biểu thức tổng quát hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng hợp phần:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n,n'} \sum_{\vec{k}_\perp, \vec{q}_\perp} \sum_{l=1}^{\infty} |I_{n,n'}|^2 \left(\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} - \bar{n}_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} \right) \frac{J_k^2 l}{q^2} \times \delta \left[\epsilon_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \epsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_n \left(\cos k_\parallel^n d - \cos k_\parallel^{n'} d \right) - \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \quad (2.34)$$

Trong biểu thức (2.34), $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ có nghĩa là số hạng thứ hai thu được từ số hạng thứ nhất nếu thay $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$. Biểu thức này cũng cho thấy, khác với bán dẫn khối, hệ số hấp thụ sóng điện từ trong siêu mạng hợp phần không chỉ phụ thuộc phi tuyến vào cường độ điện trường mà còn phụ thuộc vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam giữ điện tử n, n' và các tham số đặc trưng cho siêu mạng hợp phần như chu kỳ siêu mạng d , độ rộng mini vùng Δ_n . Tiếp theo, chúng ta xét hai trường hợp hấp thụ giới hạn, hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Trường hợp này, phải thỏa mãn điều kiện: $|k \hbar \Omega - \hbar \omega_0| \ll \bar{\epsilon}$ ($\bar{\epsilon}$ là năng lượng trung bình của điện tử tự do trong chuyển động nhiệt). Xét trường hợp hấp thụ một photon:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k^2 k}{q^2} \sum_{n,n',q} |I_{n,n'}|^2 A_1 \quad (2.35)$$

$$A_1 = \frac{mn_0}{(2\pi)^2 \bar{q}_\perp \hbar^3} \sqrt{2m^* k_B T} \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \frac{m^* A_2^2}{2\bar{q}_\perp \hbar^2} \right) \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos p_\parallel^n d \right) \right]$$

$$\times \left[1 - \exp \left(\frac{1}{k_B T} (\omega_0 - \Omega) \hbar \right) \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \quad (2.36)$$

với,

$$A_2 = \frac{\pi^2 (n'^2 - n^2) \hbar^2}{2m^* L^2} + \frac{\hbar^2 q_{\perp}^2}{2m^*} + \hbar(\omega_0 - \Omega) - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n'} d - \cos k_{\parallel}^n d) \quad (2.37)$$

Chỉ xét trong gần đúng bậc hai của hàm Bessel, ta được:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{32\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{c \sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n,n'} \sum_{\vec{q}} |I_{n,n'}|^2 \left[\left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right)^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right)^4 \cos^4 \varphi \right] \\ & \times \frac{1}{q_{\perp}^2 (2\pi)^2 q_{\perp} \hbar^3} \sqrt{2\pi m^* k_B T} \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \frac{m^* A_2^2}{2q_{\perp} \hbar^2} \right) \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos k_{\parallel}^n d \right) \right] \\ & \times \left[1 - \exp \left(\frac{1}{k_B T} (\omega_0 - \Omega) \hbar \right) \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Thực hiện các phép chuyển tổng thành tích phân:

$$\sum_{\vec{q}_{\perp}} (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} q_{\perp} dq_{\perp} \quad (2.39)$$

và sử dụng công thức sau trong [54]:

$$\int_0^{\infty} (1 + ax^2) \exp \left(-\frac{b}{x^2} - cx^2 \right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\exp(-2\sqrt{bc})}{c^{3/2}} (2c + 2a\sqrt{bc} + a) \quad (2.40)$$

Biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ được viết lại:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\pi e^4 n_0 (k_B T)^2}{c \sqrt{\chi_{\infty}} \Omega^3 \hbar^4} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n,n',\vec{k}_{\perp},\vec{q}} |I_{n,n'}|^2 \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 (n'^2 - n^2)}{2m^* L^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n'} d - \cos k_{\parallel}^n d) \right) \right] \left[1 - \exp \left(\frac{1}{k_B T} (\Omega - \omega_0) \hbar \right) \right] \end{aligned}$$

$$\times \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos k_{\parallel}^n d \right) \right] \left\{ 1 + \frac{3e^2 E_0^2 k_B T}{8m^* \hbar^2 \Omega^4} \left[1 + \frac{1}{2k_B T} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 (n'^2 - n^2)}{2m^* L^2} + \hbar (\omega_0 - \Omega) - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n'} d - \cos k_{\parallel}^n d) \right) \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \right\} \quad (2.41)$$

Biểu thức (2.41) là công thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng.

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này, phải thỏa mãn điều kiện sau: $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_0| \gg \bar{\varepsilon}$, xét trường hợp hấp thụ một photon, ta có:

$$\bar{n}_{n', \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} = n_0 \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\hbar^2 \bar{q}_{\perp}^2}{2m^*} + \frac{\pi^2 n'^2 \hbar^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) \right] \quad (2.42)$$

với $n_0 = \sum_{n', \bar{k}_{\perp}} \bar{n}_{n', \bar{k}_{\perp}}$, ta được:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 \Omega n_0 k_B T}{\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k J_k^2 \sum_{n, n', \bar{q}} |I_{n, n'}|^2 \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\hbar^2 \bar{q}_{\perp}^2}{2m^*} + \frac{\pi^2 n'^2 \hbar^2}{2m^* L^2} - \Delta_n \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) \right] \right\} \frac{1}{q_{\perp}} \delta \left\{ \left[\varepsilon_{n', \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^{n'} d - \cos k_{\parallel}^n d) \right] - \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega \right\} \quad (2.43)$$

Sau một số phép biến đổi toán học, nhận được:

$$\alpha = \frac{4\pi^2 e^2 k_B T n_0}{\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_{\infty}} m^* \hbar^2 \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, n', \bar{q}} |I_{n, n'}|^2 \left[\frac{\pi^2 (n^2 - n'^2)}{L^2} + \frac{2m^* (\Omega - \omega_0)}{\hbar} - \frac{2m^* \Delta_n}{\hbar^2} \right]$$

$$\times (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d)^{1/2} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m^* L^2} + \hbar(\Omega - \omega_0) - \Delta_n \cos k_{\parallel}^n d \right) \right] \right\} \\ \times \left\{ 1 + \frac{3}{32} \frac{e^2 E_0^2}{m^{*2} \Omega^4} \left[\frac{\pi^2 (n^2 - n'^2)}{L^2} + \frac{2m^* (\Omega - \omega_0)}{\hbar} - \frac{2m^* \Delta_n}{\hbar^2} (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) \right] \right\} \quad (2.44)$$

Biểu thức (2.44) là công thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần cho trường hợp hấp thụ xa ngưỡng.

Đối với trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm (không có từ trường ngoài):

Nhận thấy, trong trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ (trường hợp xa ngưỡng) rất nhỏ so với trường hợp hấp thụ gần ngưỡng. Do đó, chúng ta chỉ tính hệ số hấp thụ phi tuyến cho trường hợp gần ngưỡng. Trường hợp này, phải thỏa mãn điều kiện: $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_0| \ll \varepsilon$. Xét trường hợp hấp thụ một photon, tính toán tương tự như hấp thụ gần ngưỡng tán xạ điện tử-phonon quang, chú ý $N_{\vec{q}} \equiv \frac{k_B T}{\hbar \nu_s q}$ và sử dụng công thức:

$$\int_0^{\infty} x^2 (1 + ax^2) \exp \left(-\frac{b}{x^2} - cx^2 \right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\exp(-2\sqrt{bc})}{c^{3/2}} \\ \times (1 + 2\sqrt{bc}) \left[1 + \frac{a}{4c\sqrt{bc}} (4bc + 3\sqrt{bc} + 3) \right] \quad (2.45)$$

thu được biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ, trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm:

$$\alpha = \frac{e^2 m^* n_0 \xi^2 (k_B T)^3}{c \sqrt{\chi_{\infty}} v_s^2 \rho \Omega^3 \hbar^6} \sum_{n, n', \vec{q}} |I_{n, n'}|^2 \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 (n^2 - n'^2)}{2m^* L^2} - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) \right) \right]$$

$$\times \left[\exp \left(\frac{\hbar \Omega}{k_B T} \right) - 1 \right] \left\{ 1 + \frac{\beta}{2k_B T} + \frac{3e^2 E_0^2}{32m^* \hbar^2 \Omega^4 k_B T} \left(\beta^2 + 3\beta k_B T + 12(k_B T)^2 \right) \right\} \quad (2.46)$$

trong đó,

$$\beta = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n'^2 - n^2)}{2m^* L^2} + \hbar \Omega - \Delta_n \left(\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) \quad (2.47)$$

Biểu thức (2.46) là công thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần cho trường hợp hấp thụ xa ngưỡng. Biểu thức (2.46), có thể tách thành hai phần, một phần tuyến tính và một phần phi tuyến theo cường độ E_0 của sóng điện từ. Biểu thức (2.46) cũng cho thấy, hệ số hấp thụ sóng điện từ trong siêu mạng hợp phần ngoài việc phụ thuộc vào cường độ điện trường E_0 , nhiệt độ T của hệ, tần số Ω của sóng điện từ, thì hệ số hấp thụ còn phụ thuộc vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử trong siêu mạng như: các chỉ số mini vùng (n, n'), chu kỳ của siêu mạng d , độ rộng mini vùng Δ_n . Đó là điểm khác biệt của siêu mạng hợp phần với bán dẫn khối thông thường. Từ các biểu thức (2.44) và (2.46) cho thấy, khi cường độ điện trường mạnh thì hệ số hấp thụ sóng điện từ không phụ thuộc vào nhiệt độ.

Khi có mặt từ trường ngoài:

Đặt (2.26) vào biểu thức (2.27). Thực hiện các phép toán như trường hợp vắng mặt từ trường, ta thu được biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ như sau:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 k_B T \Omega_B}{c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, n', N, N'} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\vec{k}_\perp, \vec{q}_\perp} |I_{n, n'}|^2 |J_{N, N'}|^2 \left[\bar{n}_{n, N, \vec{k}_\perp} - \bar{n}_{n, N, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} \right] \times \frac{k J_k^2}{q} \delta \left(\varepsilon_{n', N, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n, N, \vec{k}_\perp}^H + \hbar \omega_0 - k \hbar \Omega \right) \quad (2.48)$$

Xét trường hợp khí điện tử không suy biến:

$$\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp)}{k_B T}\right)$$

Ta có:

$$\sum_{\vec{k}_\perp} (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{1}{2}m^*\Omega_B}^{\frac{1}{2}m^*\Omega_B} dk_x \int_{-\frac{1}{2}m^*\Omega_B}^{\frac{1}{2}m^*\Omega_B} dk_y = \left(\frac{m^*\Omega_B}{2\pi}\right)^2 \quad (2.49)$$

Xét trường hợp hấp thụ một photon và giới hạn các thành phần $J_k(x)$ với $k = 1, 2$, ta được:

$$\sum_{k=1}^2 k J_k^2\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) = \left(\frac{\lambda}{2\Omega}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2\Omega}\right)^4 = \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m^*\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m^*\Omega^2}\right)^4 \quad (2.50)$$

Hệ số hấp thụ trường hợp này có dạng:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{32\pi^3 e^2 k_B T \Omega_B n_0}{c \sqrt{x_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0}\right) \sum_{n,n',N,N'} \sum_{k=1}^2 \sum_{\vec{k}_\perp, \vec{q}} |I_{n,n'}|^2 |J_{N,N'}|^2 \left[\left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m^*\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m^*\Omega^2}\right)^4 \right] \\ & \times \frac{1}{q^2} \left(\frac{m^*\Omega_B}{2\pi}\right)^2 \left\{ \exp\left[\frac{1}{k_B T} \left[\hbar\Omega_B \left(N + \frac{1}{2}\right) - \Delta_n \cos k_\parallel^n d \right] \right] - \exp\left[\frac{1}{k_B T} \left[\hbar\Omega_B \left(N' + \frac{1}{2}\right) - \Delta_{n'} \cos k_\parallel^{n'} d \right] \right] \right\} \\ & \delta\left((N' - N)\Omega_B - \Delta_n (\cos k_\parallel^n d - \cos k_\parallel^{n'} d) + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega\right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Lại có:

$$\sum_{\vec{q}_\perp} (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} q_\perp dq_\perp \quad (2.52)$$

Biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến được viết lại dưới dạng:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 k_B T \Omega_B n_0}{c \sqrt{x_\infty} E_0^2} \left(\frac{m^*\Omega_B}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0}\right) \sum_{n,n',N,N'} \sum_{\vec{q}_\perp} |I_{n,n'}|^2 \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dq_\perp$$

$$\times \left[\left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{2m^* \Omega^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{2m^* \Omega^2} \right)^4 \right] |J_{N,N'}|^2 \frac{A}{q} \quad (2.53)$$

với,

$$A = \left\{ \exp \left[\frac{1}{k_B T} \left[\hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) - \Delta_n \cos k_\parallel^n d \right] \right] - \exp \left[\frac{1}{k_B T} \left[\hbar \Omega_B \left(N' + \frac{1}{2} \right) - \Delta_n \cos k_\parallel^{n'} d \right] \right] \right\} \delta \left((N' - N) \Omega_B - \Delta_n (\cos k_\parallel^{n'} d - \cos k_\parallel^n d) + \hbar \omega_0 - \hbar \Omega \right)$$

Theo [54] ta có:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dq_\perp \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{2m^* \Omega^2} \right)^{\frac{1}{-2}} |J_{N,N'}(u)|^2 = \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}}{2m^* \Omega^2} \right)^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{\infty} |J_{N,N'}(u)|^2 \frac{2}{a_c^2} du$$

Sử dụng tính trực giao của đa thức Laguerre suy rộng và áp dụng công thức trong [54]. Sau một vài biến đổi nhỏ, biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong siêu mạng hợp phần có dạng:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{e^4 n_o k_B T \Omega_B^2}{L \pi c \sqrt{x_\infty} \epsilon_0 a_c^2 \Omega^3 \hbar^2} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right) \sum_{n,n',N,N'} \left[1 + \frac{3}{8} \frac{e^2 E_0^2}{m^{*2} a_c^2 \Omega^4} \right] \\ & \times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left((N + \frac{1}{2}) \hbar \Omega_B - \Delta_n \cos k_\parallel^n d \right) \right] - \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left((N' + \frac{1}{2}) \hbar \Omega_B - \Delta_n \cos k_\parallel^{n'} d \right) \right] \right\} \\ & \times \delta \left[(N' - N) \hbar \Omega_B - \Delta_n (\cos k_\parallel^{n'} d - \cos k_\parallel^n d) + \hbar (\omega_0 - \Omega) \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Trong biểu thức (2.54), hàm Delta-Dirac $\delta(x)$ thể hiện định luật bảo toàn năng lượng. Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong siêu mạng hợp phần khi đó được viết như sau:

$$\alpha = \frac{e^4 n_o k_B T \Omega_B^2}{4 \pi c \sqrt{x_\infty} \epsilon_0 a_c^2 \Omega^3 \hbar^2} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right) \sum_{q_z, n, n', N, N'} |I_{n,n'}|^2 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{e^2 E_0^2}{m^{*2} a_c^2 \Omega^4} \right]$$

$$\times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left((N + \frac{1}{2}) \hbar \Omega_B - \Delta_n \cos k_{\parallel}^n d \right) \right] - \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left((N' + \frac{1}{2}) \hbar \Omega_B - \Delta_n \cos k_{\parallel}^{n'} d \right) \right] \right\}$$

$$\times \frac{\hbar \sqrt{A_1} |N - N'|}{|N - N'| \left[\hbar \Omega - \hbar \omega_0 + M \hbar \Omega_B - \Delta_n (\cos k_{\parallel}^n d - \cos k_{\parallel}^{n'} d) \right]^2 + \hbar^2 A_1} \quad (2.55)$$

ở đây,

$$A_1 = \frac{N_0 e^2 \omega_0}{2 \hbar} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) e^{-2 \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2} \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2 \right]^2;$$

$$N_0 = \frac{k_B T}{\hbar \omega_0}; a = \frac{\hbar}{m^* \omega_0}$$

Biểu thức (2.55) là công thức xác định hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần. Kết quả này cho thấy: khi cường độ điện trường mạnh thì hệ số hấp thụ sóng điện từ không phụ thuộc vào nhiệt độ.

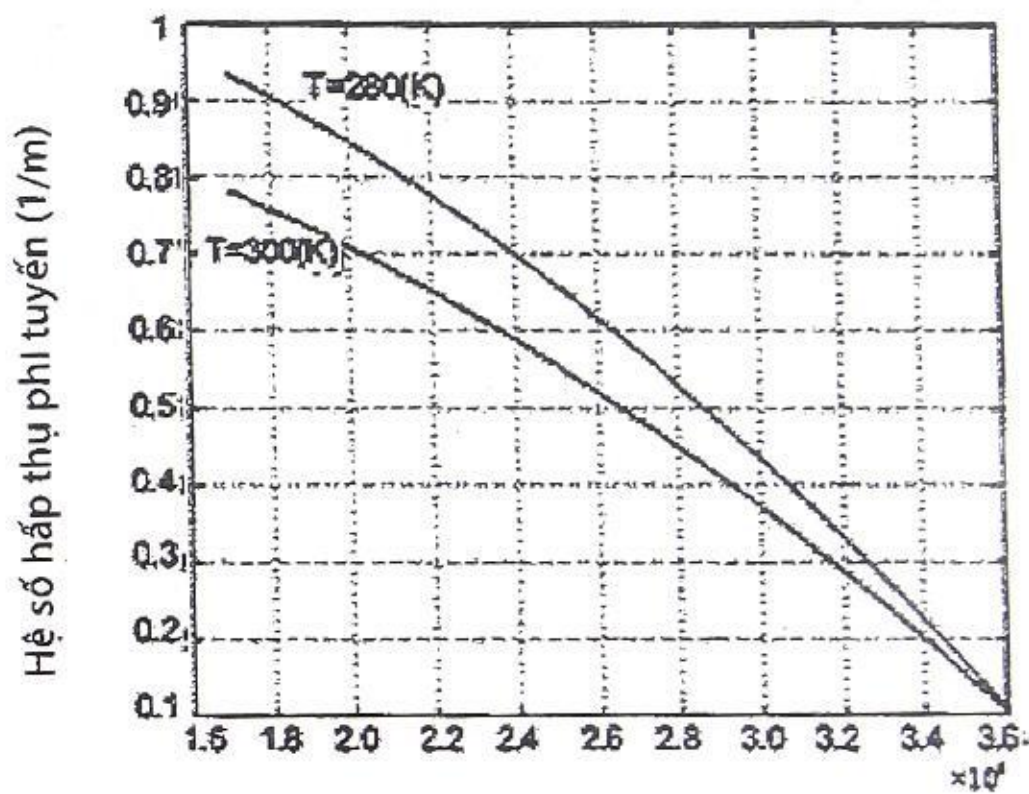
2.1.4. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

Thực hiện tính toán số và vẽ đồ thị cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh cho siêu mạng hợp phần $GaAs-Al_{0.3}Ga_{0.7}As$. Các tham số được sử dụng để tính toán như sau: $\chi_{\infty} = 10,9$; $\chi_0 = 12,9$; $n_0 = 10^{23} m^{-3}$; $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$, $m = 0,067 m_0$ (m_0 là khối lượng hiệu dụng của điện tử); $d = 134 \text{ \AA}$, là chu kỳ của siêu mạng; $\hbar \omega_0 = 36,25 meV$; $\rho = 5320 kg / m^3$; $v_s = 5370 m / s$; $\Delta_n = 0,85300 meV$; $e = 2,07 e_0$, $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, $E_0 = 3,5 \cdot 10^{14} V/cm$. $\hbar = 1,054599 \times 10^{-34} J.s$; $\Omega = 2 \cdot 10^{14} s^{-1}$.

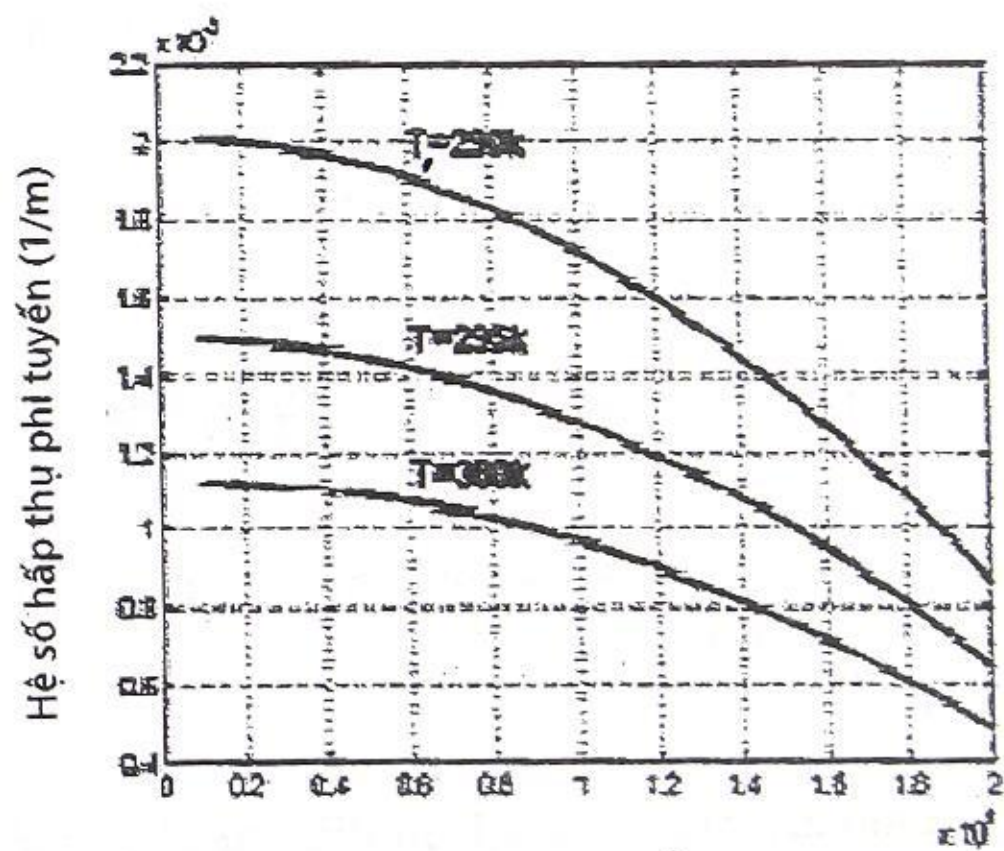
Khảo sát hệ số hấp thụ (trường hợp vắng mặt từ trường) cho thấy:

Đồ thị trên hình 2.1 và hình 2.2 biểu diễn sự phụ thuộc hệ số hấp thụ sóng điện từ vào cường độ điện trường. Kết quả cho thấy, hệ số hấp thụ sóng điện từ phụ thuộc mạnh và phi tuyến vào cường độ E_0 của sóng điện từ. Khi cường độ điện trường tăng thì hệ số hấp thụ phi tuyến

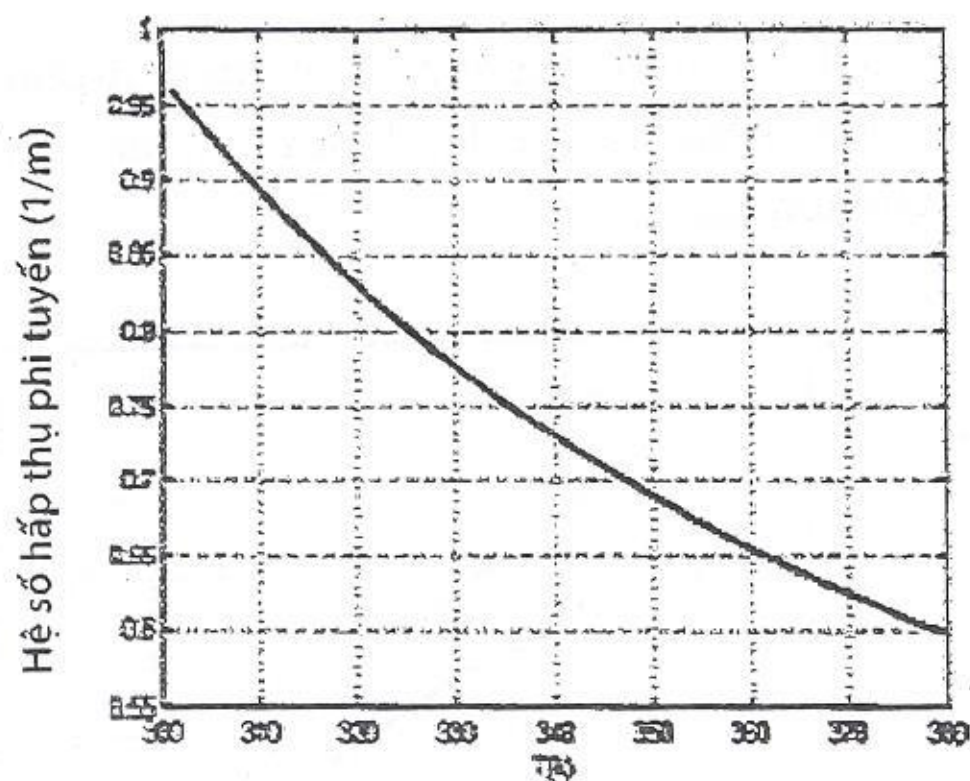
sóng điện từ giảm. Đối với trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ lớn hơn rất nhiều so với trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm.



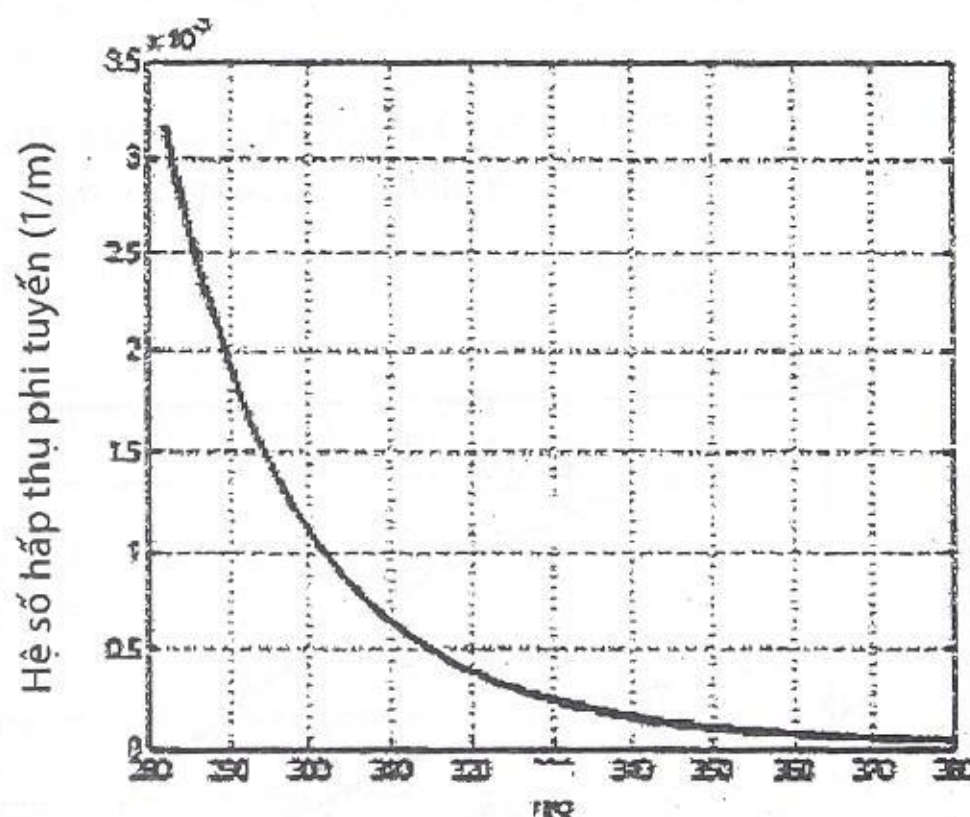
Hình 2.1. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào biên độ sóng điện từ E_0 (tán xạ điện tử-phonon quang)



Hình 2.2. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào biên độ sóng điện từ E_0 (tán xạ điện tử-phonon âm)



Hình 2.3. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào nhiệt độ T (tán xạ điện tử - phonon quang)



Hình 2.4. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào nhiệt độ T (tán xạ điện tử - phonon âm)

Đồ thị trên hình 2.3 và hình 2.4, biểu diễn sự phụ thuộc phi tuyến của hệ số hấp thụ sóng điện tử mạnh vào nhiệt độ T của hệ cho hai trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang và tán xạ điện tử-phonon âm.

Nhìn vào đồ thị ta thấy, khi nhiệt độ của hệ tăng thì hệ số hấp thụ sóng điện từ giảm, sự giảm này là phi tuyến. Mặt khác, độ lớn của hệ số hấp thụ sóng điện từ trong hai trường hợp này cũng rất khác nhau. Cụ thể, ở trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang hệ số hấp thụ sóng điện từ giảm rất nhanh và mạnh hơn so với trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm. Nguyên nhân của hiện tượng này là do tần số của phonon (âm và quang) phụ thuộc vào nhiệt độ khác nhau [1-5]. Do đó, hệ số hấp thụ sóng điện từ phụ thuộc vào nhiệt độ khác nhau đối với các tán xạ điện tử-phonon khác nhau.

Khảo sát hệ số hấp thụ khi có mặt từ trường ngoài cho thấy:

Đồ thị trên hình 2.5 và hình 2.6 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ tuyến tính và phi tuyến vào năng lượng của sóng điện từ $\hbar\Omega$ (hình 2.5) và năng lượng từ trường ngoài $\hbar\Omega_B$ (hình 2.6). Kết quả cho thấy, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ vào $\hbar\Omega$ và $\hbar\Omega_B$ lớn hơn so với trường hợp hấp thụ tuyến tính. Đồng thời, đồ thị cũng cho thấy hệ số hấp thụ sóng điện từ trong cả hai trường hợp tuyến tính và phi tuyến đều xuất hiện cộng hưởng khi tần số sóng điện từ bằng tần số của phonon quang ($\omega = \Omega$) và ($\omega = \Omega_B$) và các cực đại thứ cấp. Tuy nhiên, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ trong hai trường hợp này rất khác nhau, nếu như ở trường hợp không có từ trường, khi năng lượng sóng điện từ tăng thì hệ số hấp thụ tăng nhưng đối với trường hợp có từ trường thì kết quả ngược lại, năng lượng điện trường tăng, hệ số hấp thụ giảm. Nguyên nhân của hiện tượng này là khi có từ trường thì số điện tử tham gia vào quá trình hấp thụ bị hạn chế. Ngoài ra, mức Landau mà các điện tử nhảy tới sau quá trình hấp thụ bị ràng buộc bởi điều kiện:

$$\hbar\omega(n' - n) + \hbar\Omega_B(N' - N) + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega = 0 \quad (2.56)$$

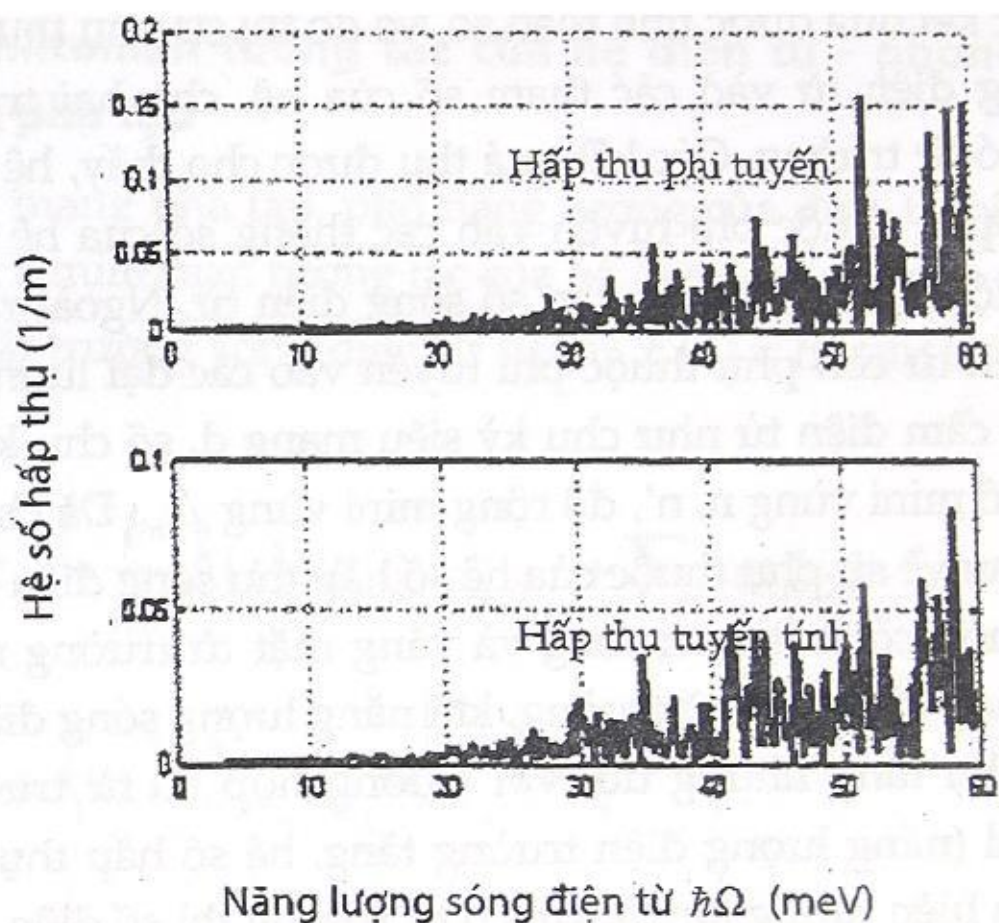
Trong khi đó đối với bán dẫn khối các chỉ số Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ là tùy ý. Điều này lý giải tại sao đồ thị

biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số của hệ không liên tục mà bị gián đoạn. Kết quả thu được đã cho thấy, giữa bán dẫn siêu mạng và bán dẫn khối có sự khác nhau cơ bản về sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ vào các thông số của hệ. Cụ thể, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ của hai loại vật liệu này vào cùng một thông số của hệ (nhiệt độ T , cường độ điện trường E ,...) khác nhau. Có sự khác biệt này là do ở bán dẫn khối các điện tử trong hệ hoàn toàn chuyển động tự do theo mọi hướng trong vật liệu, nhưng đối với siêu mạng hợp phần thì chuyển động tự do của các điện tử trong hệ bị hạn chế (các điện tử chỉ chuyển động tự do trên mặt phẳng siêu mạng, bị lượng tử theo trục siêu mạng). Đây chính là nguyên nhân dẫn đến sự khác biệt của siêu mạng hợp phần với bán dẫn khối.

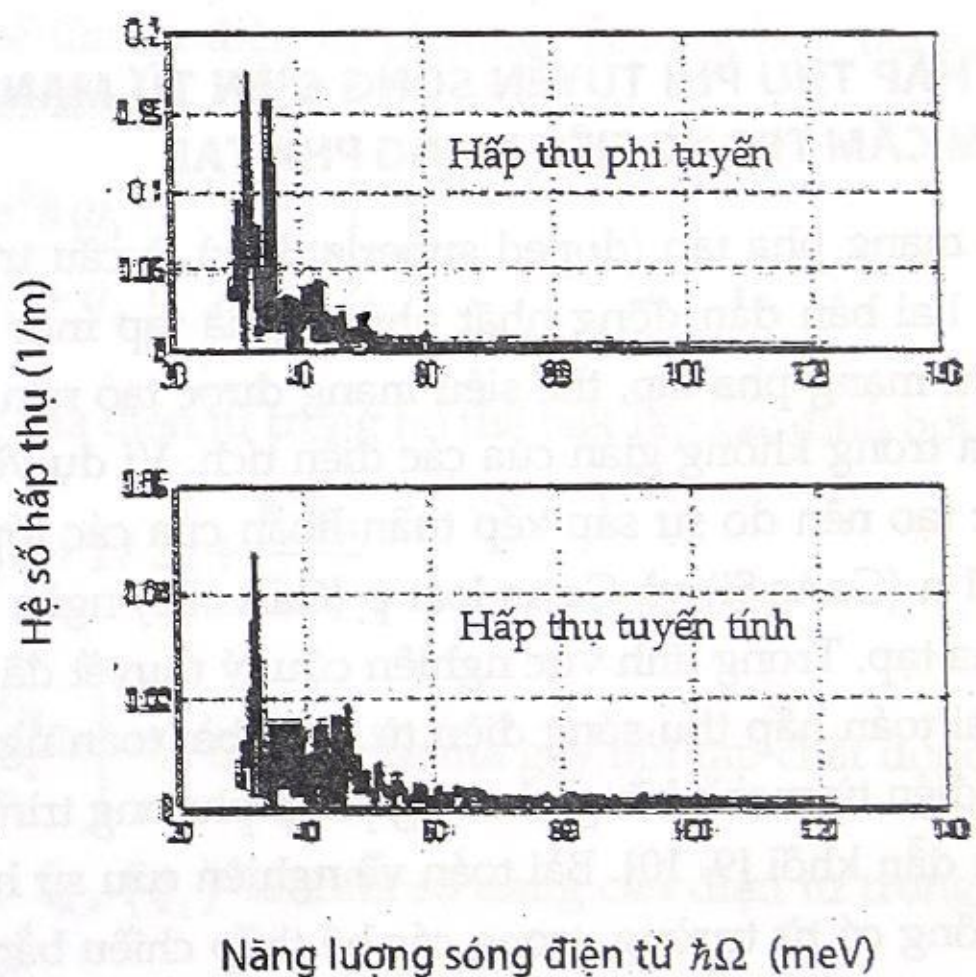
Kết luận:

Trong phần này trên cơ sở phương pháp phương trình động lượng tử cho hệ nhiều hạt và sử dụng các tính chất của toán tử sinh hủy điện tử (phonon), các kết quả thu được là:

Đã xây dựng các phương trình động lượng tử cho điện tử và hàm phân bố điện tử không cân bằng tổng quát trong siêu mạng hợp phần. Từ đó thiết lập được công thức tổng quát tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần, cho cả hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường. Thiết lập được công thức tính hệ số hấp thụ sóng điện từ cho các trường hợp giới hạn (hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ) cho các cơ chế tán điện tử - phonon khác nhau.



Hình 2.5. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$



Hình 2.6. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$

Các kết quả được tính toán số, vẽ đồ thị sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ vào các tham số của hệ, cho hai trường hợp có và không có từ trường. Các kết quả thu được cho thấy, hệ số hấp thụ sóng điện từ phụ thuộc phi tuyến vào các thông số của hệ như nhiệt độ T , cường độ điện trường E_0 , tần số sóng điện từ. Ngoài ra, hệ số hấp thụ sóng điện từ còn phụ thuộc phi tuyến vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử như chu kỳ siêu mạng d , số chu kỳ siêu mạng N , các chỉ số mini vùng n, n' , độ rộng mini vùng Δ_n . Đã chỉ ra những điểm khác nhau về sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh cho hai trường hợp có mặt từ trường và vắng mặt từ trường ngoài. Cụ thể, ở trường hợp không có từ trường, khi năng lượng sóng điện từ tăng thì hệ số hấp thụ tăng nhưng đối với trường hợp có từ trường thì kết quả ngược lại (năng lượng điện trường tăng, hệ số hấp thụ giảm). Nguyên nhân của hiện tượng này là khi có từ trường thì số điện tử tham gia vào quá trình hấp thụ bị hạn chế. Điều này lý giải tại sao đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số của hệ không liên tục mà bị gián đoạn. Đó là những điểm khác biệt giữa siêu mạng hợp phần với bán dẫn khối thông thường.

2.2. HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG SIÊU MẠNG PHA TẠP

Siêu mạng pha tạp (doped superlattices) là cấu trúc vật liệu được tạo ra từ hai bán dẫn đồng nhất nhưng pha tạp một cách khác nhau. Trong siêu mạng pha tạp, thể siêu mạng được tạo nên nhờ sự phân bố tuần hoàn trong không gian của các điện tích. Ví dụ về siêu mạng như vậy được tạo nên do sự sắp xếp tuần hoàn của các lớp bán dẫn mỏng GaAs loại n (GaAs:Si) và GaAs loại p (GaAs:Be) ngăn cách bởi các lớp không pha tạp. Trong lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết đã có nhiều nghiên cứu về bài toán hấp thụ sóng điện từ, như bài toán nghiên cứu về hấp thụ sóng điện từ mạnh bằng phương pháp phương trình động lượng tử trong bán dẫn khối [9, 10]. Bài toán về nghiên cứu sự hấp thụ sóng điện từ yếu không có từ trường, trong các hệ thấp chiều bằng phương pháp Kubo-Mori [11-13, 20, 57, 58]. Trong mục này chúng tôi trình bày bài toán hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng pha tạp trên cơ sở phương pháp phương trình động lượng tử [12].

2.2.1. Hamiltonian tương tác của hệ điện tử - phonon trong siêu mạng pha tạp

Trong siêu mạng pha tạp, phổ năng lượng của điện tử bị lượng tử hóa. Biểu thức Hamiltonian tương tác của hệ điện tử - phonon trong siêu mạng khi có mặt trường sóng điện từ ngoài $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ có dạng: [1-7, 10, 11]:

$$H = \sum_{n, \vec{k}_\perp} \varepsilon_n \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n, \vec{k}_\perp}^+ a_{n, \vec{k}_\perp} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_0 b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{n, n', \vec{q}, \vec{k}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n, n'}(q_z) a_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}^+ a_{n, \vec{k}_\perp} (b_{-\vec{q}}^+ + b_{\vec{q}}) \quad (2.57)$$

ở đây, n, n' là các số lượng tử đặc trưng cho sự lượng tử hóa năng lượng của điện tử theo phương z ($n = 0, 1, 2, \dots$). $\vec{A}(t) = \frac{e}{\Omega} \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ là thế vector của trường điện từ; $C_{\vec{q}}$ là hằng số tương tác điện tử - phonon phụ thuộc vào cơ chế tán xạ điện tử-phonon; Trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang, có dạng:

$$|C_{\vec{q}}|^2 = \frac{1}{V_0} \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_0}{\varepsilon_0 (q_\perp^2 + q_z^2)} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right); \quad (2.58)$$

phổ năng lượng của điện tử trong hố thế biệt lập xác định bởi biểu thức:

$$\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) = \hbar \omega_p (n + 1/2) + \frac{\hbar^2 \vec{k}_\perp^2}{2m^*} \quad (2.59)$$

với $\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_D}{\varepsilon_0 m^*} \right)^{1/2}$ là tần số plasma gây bởi tạp chất donor với nồng độ pha tạp, n_D , $I_{n, n'}(q_z)$ là thừa số dạng của điện tử trong siêu mạng pha tạp, có dạng:

$$I_{n, n'}(q_z) = \sum_{j=1}^{N_L} \int_0^d \psi_n(z - jd) \psi_{n'}(z - jd) e^{iq_z d} dz \quad (2.60)$$

Trong đó N_1 là số chu kỳ siêu mạng pha tạp; d là chu kỳ siêu mạng pha tạp; $\psi_n(z)$ là hàm sóng của điện tử trong hố thế biệt lập.

Khi có mặt từ trường ngoài:

Giả sử từ trường $\vec{B}$ được định hướng song song với trục siêu mạng pha tạp, nghĩa là $\vec{B} = (0, 0, B)$, chọn thế vector của trường sao cho $\vec{A} = (-B_y, 0, 0)$. Khi đó, từ trường chỉ ảnh hưởng đến chuyển động của điện tử trong mặt phẳng vuông góc với trục siêu mạng, hàm sóng của điện tử trong trường hợp này có dạng [6, 10]:

$$\psi_{n,N,\vec{k}}(\vec{r}) = A\Phi_N(x-x_0)e^{ik_y y} \sum_m e^{ik_z md} \phi_n(z-md) \quad (2.61)$$

ở đây, $n = 0, 1, 2, \dots$ là số lượng tử hóa năng lượng theo trục z ; $N = 0, 1, 2, \dots$ là chỉ số mức phân vùng Landau; $\Phi_N(x)$ là hàm sóng của dao động tử điều hòa với tâm $x_0 = \frac{c\hbar k_y}{eB}$; $\phi_n(z)$ là hàm sóng trong một hố

thế cô lập; A là hệ số chuẩn hóa hàm sóng. Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong biểu diễn lượng tử hóa lần thứ hai dưới tác dụng của trường laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ đặt vuông góc với từ trường $\vec{B}$ có dạng:

$$\begin{aligned} H_{\vec{B}} = & \sum_{n,N,\vec{k}_\perp} \varepsilon_{n,N}^H \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} \\ & + \sum_{n,N,n',N'} \sum_{\vec{q}, \vec{k}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) a_{n',N',\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp} (b_{-\vec{q}}^+ + b_{\vec{q}}) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Trong phương trình (2.62): $a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+$ và $a_{n,N,\vec{k}_\perp}$ ($b_{\vec{q}_\perp}^+$ và $b_{\vec{q}_\perp}$) là các toán tử sinh hủy điện tử (phonon quang) ở trạng thái $(n, N, \vec{k}_\perp)$ và $\vec{q} = (\vec{q}_\perp, q_z)$. Hằng số tương tác điện tử - phonon quang xác định bởi công thức (2.58). Thừa số dạng của điện tử trong siêu mạng pha tạp có dạng:

$$I_{n,n'}(q_z) = \sum_m \int_0^d \phi_n(z-md) e^{iq_z md} \phi_{n'}(z-md) dz \quad (2.63)$$

$$J_{N,N'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_N(\vec{r}_\perp - a_c^2 \vec{k}_\perp - a_c^2 \vec{q}_\perp) e^{i\vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} \Phi_{N'}(\vec{r}_\perp - a_c^2 \vec{k}_\perp) d\vec{r}_\perp \quad (2.64)$$

$u = \frac{1}{2} a_c^2 q_\perp^2$, a_c là bán kính vector của điện tử trên mặt phẳng (x,y).

Phổ năng lượng của điện tử được tính bởi công thức:

$$\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}) = \hbar \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (2.65)$$

với $\Omega_B = \frac{eB}{m^*c}$ là tần số cyclotron.

2.2.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp

Để xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp, chúng ta sử dụng hàm phân bố điện tử

$$n_{n,\vec{k}_\perp}(t) = \left\langle a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp} \right\rangle_t [3]:$$

$$i\hbar \frac{\partial n_{n,\vec{k}_\perp}(t)}{\partial t} = \left\langle a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp}, H \right\rangle_t. \quad (2.66)$$

Thực hiện các biến đổi đại số toán tử, chúng ta thu được:

Số hạng thứ nhất:

$$\left[a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp}, \sum_{n',\vec{k}'_\perp} \varepsilon_{n'} \left(\vec{k}'_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n',\vec{k}'_\perp}^+ a_{n',\vec{k}'_\perp} \right] = 0 \quad (2.67)$$

$$\text{Số hạng thứ hai: } \left[a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp}, \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_0 b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} \right] = 0 \quad (2.68)$$

Số hạng thứ ba:

$$\left[a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp}, \sum_{\vec{k}'_\perp} \sum_{n',n',\vec{q}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n',n'}(\vec{q}) a_{n',\vec{k}'_\perp + \vec{q}_\perp}^+ a_{n',\vec{q}_\perp} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+) \right] = \sum_{n',\vec{q}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(\vec{q}_\perp) \times$$

$$\times \left[F_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; n, \vec{k}_\perp; \vec{q}}(t) + F_{n, \vec{k}_\perp; n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; -\vec{q}}(t) - F_{n, \vec{k}_\perp; n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; \vec{q}}(t) - F_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; n, \vec{k}_\perp; -\vec{q}}(t) \right]$$

Thay các kết quả này vào biểu thức (2.66), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n, \vec{k}_\perp}}{\partial t} = & \frac{i}{\hbar} \sum_{n', \vec{q}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n, n'}(q_z) \left[F_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; n, \vec{k}_\perp; \vec{q}}(t) + F_{n, \vec{k}_\perp; n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; -\vec{q}}(t) \right. \\ & \left. - F_{n, \vec{k}_\perp; n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; \vec{q}}(t) - F_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; n, \vec{k}_\perp; -\vec{q}}(t) \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

Chúng ta tính: $F_{n_1 \vec{p}_1, n_2 \vec{p}_2, \vec{q}}(t)$, bằng cách xây dựng phương trình động lượng tử cho $F_{n_1 \vec{p}_1, n_2 \vec{p}_2, \vec{q}}(t)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n, \vec{k}_\perp}}{\partial t} = & - \sum_{n', \vec{q}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n, n'}(\vec{q}) \left[F_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; n, \vec{k}_\perp; \vec{q}}(t) + F_{n, \vec{k}_\perp; n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; -\vec{q}}(t) \right. \\ & \left. - F_{n, \vec{k}_\perp; n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; \vec{q}}(t) - F_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; n, \vec{k}_\perp; -\vec{q}}(t) \right] \end{aligned} \quad (2.70)$$

trong đó, $F_{n_1 \vec{k}_1, n_2 \vec{k}_2, \vec{q}}(t) = \left\langle a_{n_1 \vec{k}_1}^+ a_{n_2 \vec{k}_2} b_{\vec{q}}^- \right\rangle_t$. Sử dụng các tính chất giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy điện tử và phonon, cùng với các biến đổi giống như đã làm với siêu mạng hợp phần, chúng ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n, \vec{k}_\perp}(t)}{\partial t} = & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{s, l=-\infty}^{\infty} J_s \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) J_l \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \exp[-i(s-l)\Omega t] \sum_{\vec{q}_\perp, n} |C_{\vec{q}}|^2 |I_{n, n'}(q_z)|^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \\ & \times \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta \right) (t - t_1) \right] \right. \\ & \times \left[n_{n, \vec{k}_\perp}(t_1) N_{\vec{q}} - n_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}(t_1) (N_{\vec{q}} + 1) \right] + \left[n_{n, \vec{k}_\perp}(t_1) (N_{\vec{q}} + 1) - n_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp}(t_1) N_{\vec{q}} \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta \right) (t - t_1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\right)(t - t_1)\right] \\
& \times \left[n_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp}(t_1)(N_{\vec{q}} + 1) - n_{n, \vec{k}_\perp}(t_1)N_{\vec{q}} \right] - \left[n_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp}(t_1)(N_{\vec{q}} + 1) - n_{n, \vec{k}_\perp}(t_1)N_{\vec{q}} \right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\right)(t - t_1)\right] \Big\} \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Biểu thức (2.71) là phương trình động lượng tử của điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp. Việc tìm nghiệm của phương trình này rất phức tạp, ở đây chúng ta sử dụng phép gần đúng [31]. Tích phân hai vế phương trình (2.71), lần lượt theo t_1 và t , ta được:

$$\begin{aligned}
n_{n, \vec{k}_\perp}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{q, n'} |I_{n, n'}(q_z)|^2 |C_{\vec{q}}|^2 \sum_{s, l=-\infty}^{+\infty} J_s\left(\frac{e\vec{E}_0 \cdot \vec{q}_\perp}{m\Omega^2}\right) J_{l+s}\left(\frac{e\vec{E}_0 \cdot \vec{q}_\perp}{m\Omega^2}\right) \frac{\hbar}{l\Omega} \exp(-ik\Omega t) \\
& \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} N_{\vec{q}} - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1)}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} + \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1) - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} N_{\vec{q}}}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right. \\
& \left. - \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} N_{\vec{q}} - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1)}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} - \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{\vec{q}} + 1) - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} N_{\vec{q}}}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right\} \quad (2.72)
\end{aligned}$$

trong đó, $\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{\vec{q}} \equiv N_{\vec{q}_\perp})$ là hàm phân bố cân bằng của điện tử (phonon) (không phụ thuộc thời gian); $J_k(x)$ là hàm Bessel đối số thực. Biểu thức (3.16) là hàm phân bố không cân bằng điện tử trong siêu mạng pha tạp. Biểu thức này là tổng quát, đúng cho các cơ chế tán xạ điện tử-phonon khác nhau; là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử cho các trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường; cho cả hai trường hợp giới hạn, hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện tử.

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài:

Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trường hợp này là:

$$i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\vec{k}_\perp}}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_e \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_{oph} \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_{e-ph} \right] \right\rangle_t, \quad (2.73)$$

Số hạng thứ nhất của (2.73):

$$\left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_e \right] = \sum_{n_1, N_1, \vec{k}_1} \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, a_{n_1, N_1, \vec{k}_1}^+ a_{n_1, N_1, \vec{k}_1} \right] = 0$$

Số hạng thứ hai của (2.73):

$$\left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_{oph} \right] = \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} \right] = 0$$

Số hạng thứ ba của (2.73):

$$\begin{aligned} \left\langle \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_{e-ph} \right] \right\rangle_t &= \left\langle \sum_{n', N', \vec{q}} \sum_{\vec{k}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) \right. \\ &\times \left. \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, a_{n', N', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}^+ a_{n', N', \vec{k}_\perp} \right] (b_{-\vec{q}}^+ + b_{\vec{q}}) \right\rangle_t \end{aligned}$$

Sử dụng các hệ thức phản giao hoán tử và đại số toán tử, ta được:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp}, H_{e-ph} \right] \right\rangle_t &= \sum_{n', N', \vec{q}} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) \left[F_{n,N,\vec{k}_\perp; n', N', \vec{k}_\perp - \vec{q}; \vec{q}}(t) \right. \\ &+ F_{n', N', \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp; n, N, \vec{k}_\perp, -\vec{q}}(t) - F_{n', N', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp; n, N, \vec{k}_\perp, \vec{q}}(t) - F_{n, N, \vec{k}_\perp; n', N', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp, -\vec{q}}(t) \left. \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

trong đó,

$$F_{n_1, N_1, \vec{k}_1; n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}}(t) = \left\langle a_{n_1, N_1, \vec{k}_1}^+ a_{n_2, N_2, \vec{k}_2} b_{\vec{q}} \right\rangle_t. \text{ Biểu thức (3.17) có dạng:}$$

$$i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\vec{k}_\perp}}{\partial t} = \sum_{n', N', \vec{q}} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) \left[F_{n,N,\vec{k}_\perp; n', N', \vec{k}_\perp - \vec{q}; \vec{q}}(t) \right.$$

$$+F_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1,n,N,\bar{k}_1,-\bar{q}}^*(t)-F_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1,n,N,\bar{k}_1,\bar{q}}(t)-F_{n,N,\bar{k}_1,n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1,-\bar{q}}^*(t)] \quad (2.75)$$

Hoàn toàn tương tự như cách thiết lập phương trình động lượng từ cho $a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}^-$, ta có:

$$i\hbar \frac{\partial a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}^-}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}^-, H \right] \right\rangle_t = \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}^-, H_e \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}^-, H_{oph} \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}^-, H_{e-oph} \right] \right\rangle_t \quad (2.76)$$

Tương tự như cách làm ở trên, chúng ta lần lượt tính các số hạng ở vế phải của (2.76). Sau đó, thay kết quả của từng số hạng vào (2.75), ta được:

$$i\hbar \frac{\partial F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(t)}{\partial t} = F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(t) \left[\varepsilon_{n_2,N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) - \varepsilon_{n_1,N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] + \sum_{n,N,\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[I_{n,n_2}(q_z) J_{N,N_2}(u) \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_2} \times b_{\bar{q}}^- (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_t - I_{n_1,n}(q_z) J_{N_1,N}(u) \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}}^- \right\rangle_t \right] \quad (2.77)$$

Giải phương trình (2.77) bằng phương pháp biến thiên hằng số với giả thiết đoạn nhiệt:

$$\ln \left[F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(-\infty) \right] = 0 \quad (2.78)$$

Áp dụng điều kiện đoạn nhiệt, thu được:

$$F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}^0(t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\varepsilon_{n_2,N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) - \varepsilon_{n_1,N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] dt_1 \right\}$$

Suy ra nghiệm của phương trình không thuần nhất (2.78), có dạng:

$$F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(t) = B(t) F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}^0(t) \quad (2.79)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (2.79) theo t , ta được:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{n_1, N_1, \bar{k}_1, n_2, N_2, \bar{k}_2, \bar{q}}(t) &= i\hbar \frac{\partial B(t)}{\partial t} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\hbar\omega_0 + \varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar\omega_0 \right] dt_1 \right\} + \left[\hbar\omega_0 + \varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar\omega_0 \right] F_{n_1, N_1, \bar{k}_1, n_2, N_2, \bar{k}_2, \bar{q}}(t)
 \end{aligned} \quad (2.80)$$

So sánh (2.80) với (2.77), ta được:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial B(t)}{\partial t} &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t_1) \right) - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar\omega_0 \right] dt_1 \right\} \\
 &\times \left\{ \sum_{n, N, \bar{q}} C_{\bar{q}} \left[I_{n, n_2}(q_z) J_{N, N_2}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1}^+ a_{n, N, \bar{k}_2 - \bar{q}_\perp} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_t - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - I_{n_1, n}(q_z) J_{N_1, N}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1 + \bar{q}_\perp}^+ a_{n, N, \bar{k}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_t \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Tích phân hai vế (2.81), tìm được $B(t)$. Thay $B(t)$ và (2.78) vào (2.80), thu được:

$$\begin{aligned}
 F_{n_1, N_1, \bar{k}_1, n_2, N_2, \bar{k}_2, \bar{q}}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_1} \left[\varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t_2) \right) + \hbar\omega_0 - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t_2) \right) \right] dt_2 \right\} \left\{ \sum_{n, N, \bar{q}} C_{\bar{q}} \left[I_{n, n_2}(q_z) J_{N, N_2}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1}^+ a_{n, N, \bar{k}_2 - \bar{q}_\perp} b_{\bar{q}} \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_{t_1} - I_{n_1, n}(q_z) J_{N_1, N}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1 + \bar{q}_\perp}^+ a_{n, N, \bar{k}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_{t_1} \right] \right\} dt_1
 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Sử dụng các công thức:

$$\exp(\pm iz \sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp(\pm inx) \quad ; \quad N_{-\bar{q}} = N_{\bar{q}}; \quad \omega_{-\bar{q}} = \omega_{\bar{q}};$$

$$\langle b_{q_1}^+ b_{q_2}^- \rangle_t = N_{\bar{q}_1} \delta_{\bar{q}_1, \bar{q}_2}; \quad \langle b_{q_1}^- b_{q_2}^+ \rangle_t = (N_{\bar{q}_1} + 1) \delta_{\bar{q}_1, \bar{q}_2}; \quad (2.83)$$

$$\langle a_{n,N,\bar{k}}^+ a_{n',N',\bar{k}'} \rangle_t = n_{n,N,\bar{k}} \delta_{n,n'} \delta_{N,N'} \delta_{\bar{k},\bar{k}'}; \quad n_{n,N,\bar{k}}(t) \approx \bar{n}_{n,N,\bar{k}}$$

Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}}(t)}{\partial t} = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n',N',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,n'}(q_z)|^2 |J_{N,N'}(u)|^2 \sum_{l,s=-\infty}^{\infty} J_l\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) e^{-i(l-s)\Omega t} \\ & \times \int_{-\infty}^t dt \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_{\perp}) - \varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t_1) \right] \right. \\ & \times \left[n_{n,N,\bar{k}} (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n',N',\bar{k}_{\perp}-\bar{q}_{\perp}} N_{\bar{q}} \right] + \left[n_{n,N,\bar{k}} N_{\bar{q}} - n_{n',N',\bar{k}_{\perp}-\bar{q}_{\perp}} (N_{\bar{q}} + 1) \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_{\perp}) - \varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t_1) \right] \\ & - \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}) - \varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_{\perp}) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t_1) \right] \\ & \times \left[n_{n',N',\bar{k}_{\perp}+\bar{q}_{\perp}} (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n,N,\bar{k}} N_{\bar{q}} \right] - \left[n_{n',N',\bar{k}_{\perp}+\bar{q}_{\perp}} N_{\bar{q}} - n_{n,N,\bar{k}} (N_{\bar{q}} + 1) \right] \\ & \left. \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}) - \varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_{\perp}) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t_1) \right] \right\}_{(\delta \rightarrow 0^+)} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Giải phương trình (2.84) bằng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp và lấy tích phân (2.84) theo t_1 , sau đó theo t , ta được :

$$n_{n,N,\bar{k}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n',N',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,n'}(q_z)|^2 |J_{N,N'}(u)|^2 \sum_{l,s=-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{k\Omega} J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) J_{s+l}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp(-il\Omega t) \left\{ \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} N_{\vec{q}}^- - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} (N_{\vec{q}}^- + 1)}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right. \\
& + \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} (N_{\vec{q}}^- + 1) - \bar{n}_{n,N,\vec{p}_\perp} N_{\vec{q}}^-}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \\
& - \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} N_{\vec{q}}^- - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} (N_{\vec{q}}^- + 1)}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \\
& \left. - \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} (N_{\vec{q}}^- + 1) - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} N_{\vec{q}}^-}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right\} (\delta \rightarrow 0^+) \quad (2.85)
\end{aligned}$$

Phương trình (2.85) là cơ sở để thiết lập công thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong siêu mạng pha tạp.

2.2.3. Biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng pha tạp

Mật độ dòng hạt tải trong siêu mạng pha tạp xác định bởi:

$$\bar{J}_\perp(t) = \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n,\vec{k}_\perp} \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) n_{n,\vec{k}_\perp}(t) = -\frac{e^2}{m^* c} \sum_{n,\vec{k}_\perp} \bar{A}(t) n_{n,\vec{k}_\perp} + \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n,\vec{k}_\perp} \vec{k}_\perp n_{n,\vec{k}_\perp} \quad (2.86)$$

$$\bar{A}(t) = -\bar{E}_0 c \int \sin(\Omega t) dt = \frac{\bar{E}_0 c}{\Omega} \cos(\Omega t) \quad (2.87)$$

Đặt $n_0 = \sum_{n,\vec{k}_\perp} \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp}$ là mật độ hạt tải trong siêu mạng pha tạp, sử

dụng tính chất hàm Bessel: $j_{-\mu}(x) = (-1)^\mu j_\mu(x) = j_\mu(-x)$. Chỉ xét

phần thực của biểu thức mật độ dòng và giới hạn hấp thụ một photon ($l=1$). Chúng ta tìm được biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong siêu mạng pha tạp:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n,n'} \sum_{\vec{k}_\perp, \vec{q}_\perp} \sum_{l=1}^{\infty} |I_{n,n'}|^2 \frac{l}{q^2} J_l^2 \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \times n_{n,\vec{k}_\perp} \delta \left[\epsilon_{n'}(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \epsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega \right] \quad (2.88)$$

Như vậy, khác với cấu trúc bán dẫn khối, hệ số hấp thụ sóng điện từ trong siêu mạng pha tạp không chỉ phụ thuộc phi tuyến vào các thông số của hệ mà còn phụ thuộc phi tuyến vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử trong siêu mạng pha tạp như chu kỳ siêu mạng d ; các chỉ số mini vùng n, n' ; số chu kỳ siêu mạng N ; nồng độ pha tạp n_D . Tiếp theo, chúng ta xét hai trường hợp giới hạn: hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Trường hợp này, phải thỏa mãn điều kiện $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_0| \ll \epsilon$, xét trường hợp hấp thụ một photon và để tính hệ số hấp thụ sóng điện từ trong công thức (2.88) ta dựa vào hàm phân bố cân bằng của điện tử theo phân bố Boltzmann (xét khí điện tử không suy biến)

$$\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} = n_0 \exp \left(-\frac{\epsilon_{n,\vec{k}_\perp}}{k_B T} \right) = n_0 \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m^* k_B T} - \hbar\omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (2.89)$$

Tách tổng trên thành hai tổng riêng rẽ theo $\vec{k}_\perp$ và $\vec{q}_\perp$

a) Theo vector $\vec{k}_\perp$, ta sử dụng các công thức biến đổi [54]:

$$A_1 = \sum_{\vec{k}_\perp} \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} \delta \left(\epsilon_{n'}(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \epsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega \right) = \sum_{\vec{k}_\perp} \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} \delta \left(\frac{\hbar^2 q_\perp^2}{2m^*} - \hbar\omega_p (n - n') + \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{k}_\perp \cdot \vec{q}_\perp + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega \right) \quad (2.90)$$

$$\text{Đặt } A_2 = \hbar\omega_p (n - n') + \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{k}_\perp \cdot \vec{q}_\perp + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega \quad (2.91)$$

Đặt (2.89) vào (2.90), sử dụng phép chuyển tổng thành tích phân, ta nhận được:

$$A_1 = \frac{n_0}{(2\pi)^2} \frac{m^*}{\hbar^2 q_\perp} \sqrt{\frac{2m^* k_B T}{\hbar^2}} \pi \exp\left(\frac{m^* A_2^2}{2\hbar^2 q_\perp^2 k_B T}\right) \exp\left(\frac{\hbar\omega_p}{k_B T} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (2.92)$$

Hạn chế thành phần J_l với $l=1, 2$. Lấy hai số hạng đầu tiên của J_1 và J_2

$$\sum_{l=1}^2 J_l^2 \left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) = \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2}\right)^4 \quad (2.93)$$

Ta được:

$$\alpha = \frac{4\sqrt{2}n_0 e^2 \Omega (\pi m^* k_B T)^{3/2}}{\epsilon_0 c \hbar^3 \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0}\right) \sum_{n,n'} |I_{n,n'}|^2 \exp\left(-\frac{\varsigma}{2k_B T}\right) \\ \times \exp\left(-\frac{\hbar\omega_p}{k_B T} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \sum_{l=1}^2 \frac{l}{q^2} \frac{1}{q_\perp} \left[\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2}\right)^4 \right] \exp\left(-\frac{m^* \varsigma^2}{2\hbar^2 q_\perp^2 k_B T} - \frac{\hbar^2 q_\perp^2}{8m^* k_B T}\right) \quad (2.94)$$

ở đây, $\varsigma = \hbar\omega_p (n - n') + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega$

Tiếp tục thực hiện phép biến đổi

$$\sum_{\vec{q}} (...) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \bar{q}_\perp d\bar{q}_\perp \int_{-\infty}^\infty dq_z, \text{ và sử dụng các kết quả}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8};$$

$$\int_0^\infty (x + ax^3) \exp\left(-\frac{\rho}{x^2} - \sigma x^2\right) dx = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} K_1(2\sqrt{\rho\sigma}) + a \left(\frac{\rho}{\sigma}\right) K_2(2\sqrt{\rho\sigma}) \quad (2.95)$$

với $K_\nu(x)$ là hàm Bessel đối số ảo thỏa mãn:

$$K_2(x) = K_0(x) + \frac{2}{x} K_1(x)$$

$$\text{lấy } K_0(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}; K_1(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left(1 + \frac{3}{8x}\right) \quad (2.96)$$

Thay (2.96) và (2.95) vào (2.94) ta thu được biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}\pi e^4 n_0^* (k_B T)^2}{8c \sqrt{m^*} \chi_\infty \Omega^3 \hbar^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, n', q_z} |I_{n, n'}(q_z)|^2 \exp \left(- \frac{\hbar \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\xi}{2}}{k_B T} \right) \\ \times e^{-2\sqrt{\rho\sigma}} \left(\frac{\rho}{|\xi|\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{3}{16\sqrt{\rho\sigma}} + \frac{3e^2 E_0^2}{32m^{*2} \Omega^4} \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\rho\sigma}} + \frac{1}{16\rho\sigma} \right] \right\} \quad (2.97)$$

$$\text{với } \bar{n}_{n, \bar{k}_\perp} = n_0^* \exp \left(\frac{\varepsilon_{n, \bar{k}_\perp}}{kT} \right); n_0^* = \frac{n_0 e^{\frac{3}{2}} \pi^2 \hbar^3}{V m^{*2} (kT)^{\frac{3}{2}}}; a = \frac{3}{8} \left(\frac{eE_0}{2m^* \Omega^2} \right)^2$$

$$\xi = \hbar \omega_p (n - n') + \hbar \omega_0 - \hbar \Omega; \rho = \frac{m^* \xi^2}{2\hbar^2 k_B T}; \sigma = \frac{\hbar^2}{8m^* k_B T}.$$

Biểu thức (2.97) là hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, tán xạ điện tử - phonon quang.

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này, điều kiện $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_0| \gg \bar{\varepsilon}$ phải thỏa mãn. Do đó, có thể viết $|\bar{k}_\perp| \ll |\bar{q}_\perp|$, dẫn đến:

$$\delta \left[\varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega \right] \approx \delta \left[\hbar\omega_p(n' - n) + \frac{\hbar^2 q_\perp^2}{2m^*} + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega \right]$$

Tính toán tương tự như trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, biểu thức (3.32) trở thành:

$$\alpha = \frac{\pi^2 e^4 k_B T n_0}{\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} m^* \hbar^2 \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, n', q_z} |I_{n, n'}(q_z)|^2 \left[\frac{2m^*}{\hbar} \omega_p(n - n') + \frac{2m^*}{\hbar} (\Omega - \omega_0) \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[1 + \frac{3}{32} \frac{e^2 E_0^2}{m^{*2} \Omega^4} \left(\frac{2m^*}{\hbar} \omega_p(n - n') + \frac{2m^*}{\hbar} (\Omega - \omega_0) \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (2.98)$$

Trong trường hợp giới hạn, khi số hạng tỷ lệ với $E_0^2 \rightarrow 0$, thì hệ số hấp thụ phi tuyến (2.97) và (2.98) trở lại hệ số hấp thụ tuyến tính sóng điện từ đã tính bằng phương pháp Kubo-Mori [58].

Khi có mặt từ trường ngoài:

Mật độ dòng hạt tải trong siêu mạng pha tạp được tính theo công thức lượng tử quen thuộc:

$$\vec{J}_\perp(t) = \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n, N, \vec{k}_\perp} \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) n_{n, N, \vec{k}_\perp}(t) \quad (2.99)$$

Đặt $n_0 = \sum_{n, N, \vec{k}_\perp} n_{n, N, \vec{k}_\perp}$ là mật độ hạt tải trong siêu mạng pha tạp. Biểu thức mật độ dòng được viết lại

$$\vec{J}_\perp(t) = -\frac{e^2 n_0 \vec{E}_0}{m^* \Omega} \cos(\Omega t) + \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n, N, \vec{k}_\perp} \vec{p}_\perp n_{n, N, \vec{k}_\perp}(t) \quad (2.100)$$

Số hạng thứ hai của (2.100), được tính như sau:

$$\frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n, N, \vec{k}_\perp} \vec{k}_\perp n_{n, N, \vec{k}_\perp}(t) = -\frac{e}{m^*} \sum_{n, N, \vec{k}_\perp} \sum_{n', N', \vec{q}} |C_{\vec{q}}|^2 |I_{nn'}(q_z)|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k, s=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{k}_\perp}{i\Omega} J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \times J_{l+s} \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \exp(-i\Omega t) \left\{ \frac{\bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right. \\
& + \frac{\bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \\
& - \frac{\bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_\perp) - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \\
& \left. - \frac{\bar{n}_{n,N,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n',N',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right\} \quad (2.101)
\end{aligned}$$

Trong (2.101), Ta đổi $\bar{q} \rightarrow -\bar{q}$; $s \rightarrow -s$ sau đó, lấy tổng thứ nhất của (2.101) cộng với số hạng thứ tư của (2.99), tổng thứ hai cộng với tổng thứ ba của (2.101). Tiếp tục biến đổi $\bar{k}_\perp \rightarrow \bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp$; $n \rightarrow n'$; $N \rightarrow N'$ và chỉ lấy phần thực của biểu thức được. Cuối cùng biểu thức của mật độ dòng có dạng:

$$\begin{aligned}
\bar{J}_\perp(t) &= -\frac{e^2 n_0 \bar{E}_0}{m^* \Omega} \cos(\Omega t) - \frac{2e\pi}{m^*} \sum_{n,N,\bar{k}_\perp,\bar{q}_\perp} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{nn'}(q_z)|^2 |J_{N,N'}(u)|^2 \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{q}_\perp}{k\Omega} \sin(k\Omega t) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \left[J_{k+s} \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) + J_{s-k} \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \right] \\
&\times \delta \left[\varepsilon_{n',N'}^H(\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\bar{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega \right] \quad (2.102)
\end{aligned}$$

Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong siêu mạng pha tạp được tính theo công thức quen thuộc:

$$\alpha = \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_\infty}E_0^2} \left\langle \bar{J}_\perp(t) \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle, \quad (2.103)$$

Đặt (2.102) vào (2.103), ta được:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_\infty}E_0^2} \left[\left\langle -\frac{e^2 n_0}{m^* \Omega} \bar{E}_0 \cos \Omega t \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle + \frac{2e\pi}{m^*} \left\langle \sum_{n,N,\vec{k}_\perp,\vec{q}_\perp} |C_{\vec{q}}|^2 |I_{nn'}(q_z)|^2 |J_{NN'}(u)|^2 \right. \right. \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\vec{q}_\perp}{k\Omega} \sin(k\Omega t) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \left[J_{k+s}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) + J_{s-k}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \right] \\ & \left. \times \delta \left[\varepsilon_{n,N'}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_0 - s\hbar\Omega \right] \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.104)$$

Tính số hạng thứ nhất của (2.104)

$$\left\langle -\frac{e^2 n_0}{m^* \Omega} \bar{E}_0 \cos \Omega t \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle = \frac{e^2 n_0 E_0^2}{m^* \Omega T} \int_0^T \sin \Omega t \cos \Omega t dt = 0$$

Sử dụng tính chất hàm Bessel trong [54]

$$J_{s+1}(x) + J_{s-1}(x) = \frac{2s}{x} J_s(x); \quad N_{\vec{q}} + 1 \approx N_{\vec{q}} = \frac{k_B T}{\hbar\omega_0}$$

Xét điện tử không suy biến $\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} = n_0 \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp)\right)$. Xét trường hợp hấp thụ một photon và giới hạn các thành phần $J_s(x)$ (và $s = 1, 2$), ta được:

$$\sum_{s=1}^2 s J_s^2\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) = \left(\frac{\lambda}{2\Omega}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\Omega}\right)^4 = \left(\frac{e\bar{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m\Omega^2}\right)^4$$

Biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử được viết lại:

$$\alpha = \frac{32e^2 \pi^3 n_0 k_B T \Omega_B}{4V \varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right) \sum_{n,n',N,N'} |I_{nn'}|^2 |J_{NN'}(u)|^2 \left[\left(\frac{e\bar{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}_0 \vec{q}_\perp}{2m\Omega^2}\right)^4 \right]$$

$$\times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\hbar \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) \right] - \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\hbar \omega_p \left(n' + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_B \left(N' + \frac{1}{2} \right) \right) \right] \right\} \delta \left[\hbar \omega_p (n' - n) + \hbar \Omega_B (N' - N) + \hbar (\omega_0 - \Omega) \right] \quad (2.105)$$

Thực hiện phép chuyển phổ theo công thức sau:

$$\sum \bar{q} \rightarrow \frac{V}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \bar{q}_\perp d\bar{q}_\perp \int_{-\infty}^\infty q_z dq_z;$$

$$\sum \bar{k}_\perp \rightarrow \frac{L_y}{2\pi\hbar} \int_{-\frac{1}{2}m^*\Omega_B}^{\frac{1}{2}m^*\Omega_B} dk_y \frac{L_y m^* \Omega_B}{2\pi\hbar}$$

thay vào (3.49):

$$\alpha = \frac{L_y e^4 \pi n_0 k_B T \Omega_B}{4 \varepsilon_0 m^* c \sqrt{x_\infty} a_c^2 \Omega^2 \hbar} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right) \sum_{n, n', N, N'} |I_{0,0}|^2 \int_0^\infty \left(1 + \frac{3e^2 E_0^2 q_\perp^2}{32 m^{*2} \Omega^4} \right) |J_{N, N'}(u)|^2 du \times \delta \left[\hbar \omega_p (n' - n) + \hbar \Omega_B (N' - N) + \hbar (\omega_0 - \Omega) \right] \quad (2.106)$$

Áp dụng kết quả sau trong [16]:

$$|J_{N, N'}(u)|^2 = \frac{n_1!}{n_2!} (u)^{n_2 - n_1} e^{-u} |L_{n_1}^{n_2 - n_1}(u)|$$

ở đây, $n_1 = \min(N, N')$, $n_2 = \max(N, N')$ và $|L_{n_1}^{n_2 - n_1}(u)|$ là đa thức Lagrange, sử dụng công thức tích phân trong [17], ta được:

$$\alpha = \frac{L_y e^4 \pi n_0 k_B T \Omega_B}{2 \varepsilon_0 m^* c \sqrt{x_\infty} a_c^2 \Omega^3 \hbar} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right) \left\{ \pi^{-1} e^{-2 \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2} \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2 \right]^2 \right\} \times \delta \left[\hbar \omega_p (n' - n) + \hbar \Omega_B (N' - N) + \hbar (\omega_0 - \Omega) \right] \quad (2.107)$$

Biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi có từ trường ngoài được viết

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{e^4 n_0^* k_B T \Omega_B}{4\pi \epsilon_0 m^* c \sqrt{\chi_\infty} a_c^2 \Omega^3} \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right) \sum_{n, n', N, N'} \left[1 + \frac{3e^2 E_0^2 q_\perp^2}{32 m^{*2} \Omega^4} (N + N' + 1) \right] \\ & \times \frac{1}{\pi} e^{-2 \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2} \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2 \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{N_1 d}{a} \right)^2 \right]^2 n \sqrt{A^* |N - N'|} \\ & \times \left\{ \frac{\exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\hbar \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) \right]}{|N - N'| \left[n(\Omega - \omega_0) + n \Omega_B (N - N') + n \omega_p (n - n') \right]^2 + n^2 A^*} \right. \\ & \left. - \frac{\exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\hbar \Omega_B \left(N' + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_p \left(n' + \frac{1}{2} \right) \right) \right]}{|N - N'| \left[n(\Omega - \omega_0) + n \Omega_B (N - N') + n \omega_p (n - n') \right]^2 + n^2 A^*} \right\} \end{aligned} \quad (2.108)$$

trong đó:

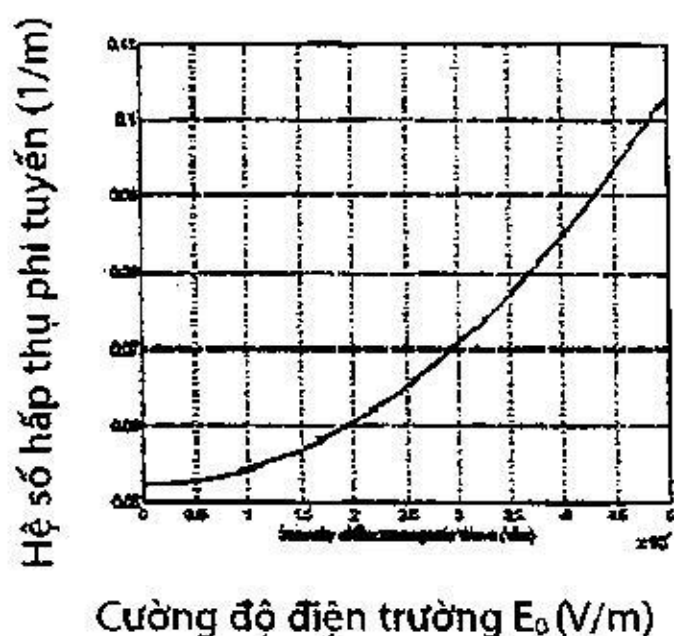
$$A^* = N_0 \frac{C_0^2}{4\pi \hbar^2} |I_{0,0}|^2 = N_0 \frac{e^2 \omega_0}{2\hbar} |I_{0,0}|^2 \left(\frac{1}{x_\infty} - \frac{1}{x_0} \right); a = \frac{\hbar}{m^* \omega_p}; N_0 = \frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \quad (2.109)$$

Biểu thức (2.108) là hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi hệ đặt trong từ trường ngoài. Đặc biệt, khi cường độ trường bức xạ laser nhỏ và khi số hạng tỷ lệ với E_0^2 tiến tới 0, thì hệ số hấp thụ phi tuyến trở về hệ số hấp thụ tuyến tính như đã được khảo sát bằng công thức Kubo-Mori [58].

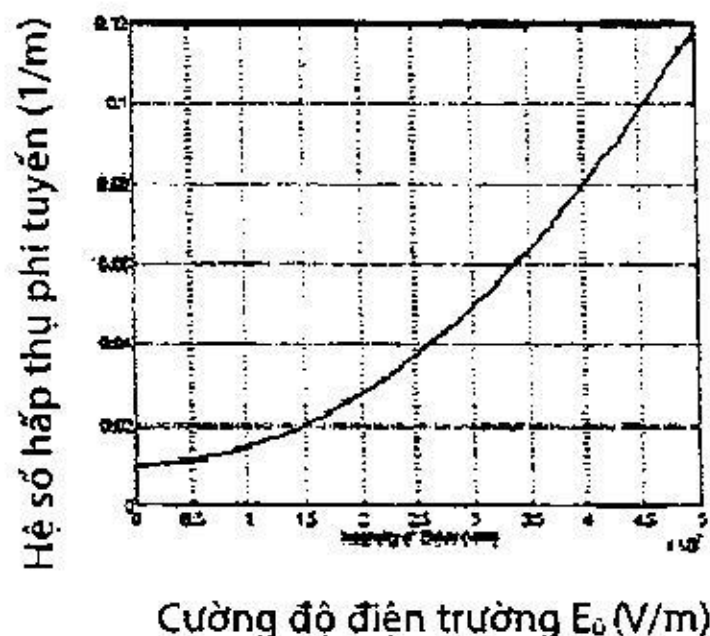
2.2.4. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

Dưới đây là kết quả tính số và phân tích đối với siêu mạng pha tạp điển hình: $n\text{-GaAs}/p\text{-GaAs}$. Cho cả hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường. Các tham số đặc trưng cho siêu mạng pha tạp $n\text{-GaAs}/p\text{-GaAs}$:

$\chi_\infty = 10,9$; $\chi_0 = 12,9$; $n_0 = 10^{23}\text{m}^{-3}$; $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$, $m^* = 0,067m_0$ (m_0 là khối lượng của electron tự do) $d = 500\text{\AA}$, $\hbar\omega_0 = 36,25\text{meV}$; $\Omega = 5,5.10^{13}\text{ s}^{-1}$, $T = 300\text{ K}$, $e = 2,07e_0$, $e_0 = 1,6.10^{-19}\text{C}$, $E_0 = 3,5.10^{14}\text{ V/cm}$.



Hình 2.7: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào cường độ điện trường E_0 (trường hợp không có từ trường)

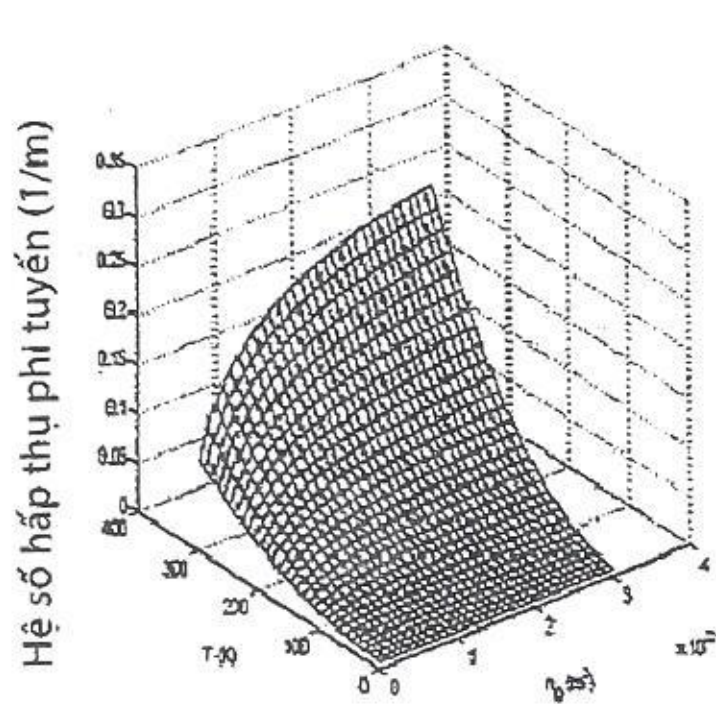


Hình 2.8: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào cường độ điện trường E_0 (Trường hợp có từ trường)

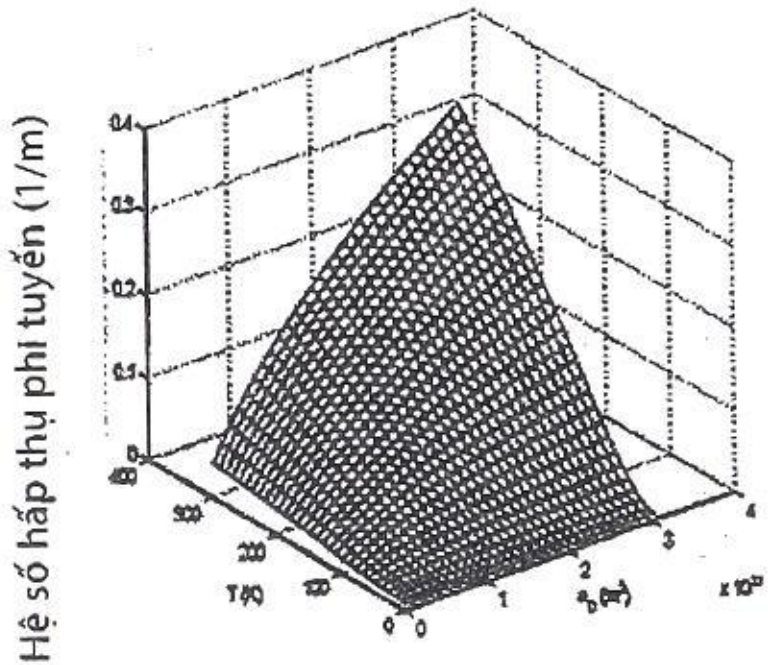
Đồ thị trên hình 2.7 và hình 2.8 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ (α) vào cường độ điện trường cho hai trường hợp vắng mặt và có mặt từ trường. Cả hai đồ thị cho thấy, α phụ thuộc rất mạnh và phi tuyến vào cường độ điện trường của sóng điện từ. Khi cường độ điện trường tăng thì hệ số hấp thụ tăng lên rất nhanh. Tuy nhiên, giá trị của α khi có mặt từ trường (hình 2.8) lớn hơn so với khi không có từ trường (hình 2.7).

Đồ thị trên hình 2.9 và hình 2.10 là kết quả thu được từ việc khảo sát hệ số hấp thụ sóng điện từ vào nồng độ pha tạp n_0 và nhiệt độ T của hệ. Hệ số hấp thụ tăng mạnh theo sự tăng của nồng độ pha tạp n_0 và

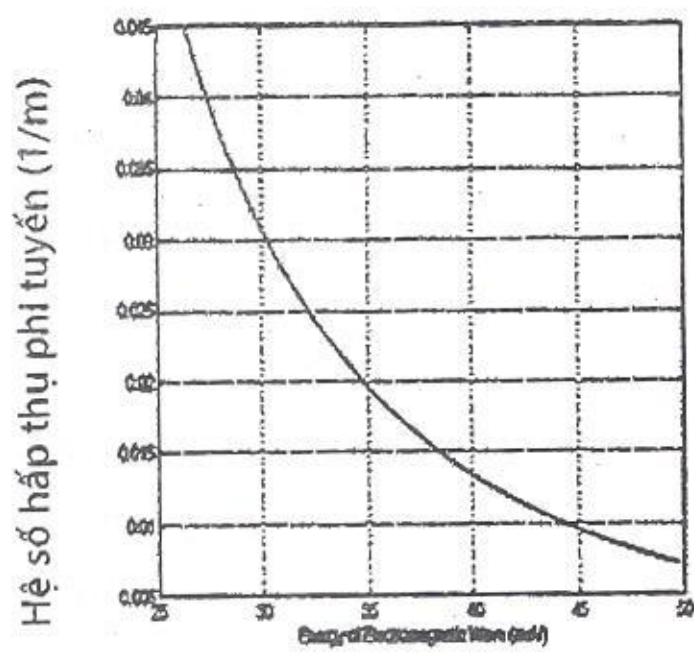
nhiệt độ T của hệ, sự tăng này là phi tuyến. Từ đồ thị ta thấy, ở trường hợp vắng mặt từ trường thì độ lớn cũng như sự biến đổi của hệ số hấp thụ nhỏ hơn hệ số hấp thụ trong trường hợp có từ trường.



Hình 2.9: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào nồng độ pha tạp n_D và nhiệt độ T (Trường hợp không có từ trường)

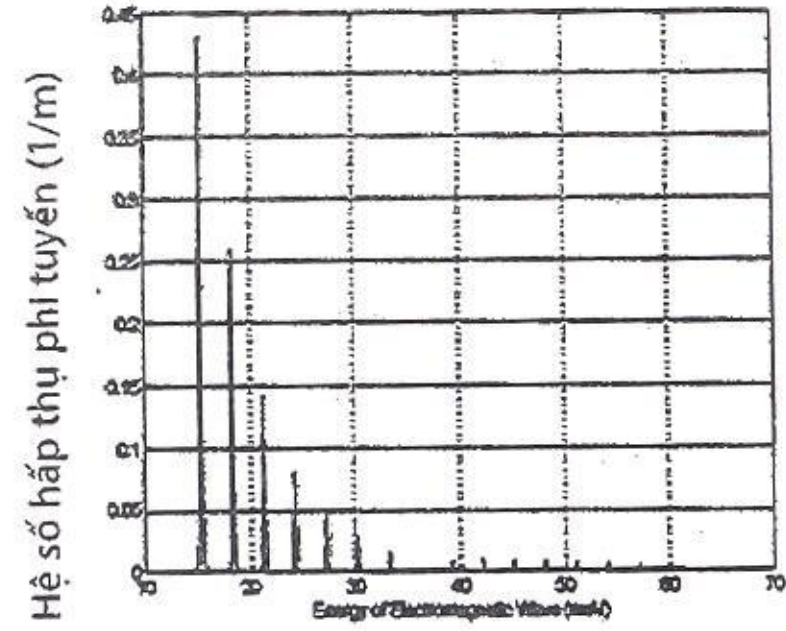


Hình 2.10: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào nồng độ pha tạp n_D và nhiệt độ T (Trường hợp có mặt từ trường)



Năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$

Hình 2.11: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng $\hbar\Omega$ của sóng điện từ (Trường hợp không có từ trường)



Năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$

Hình 2.12: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng $\hbar\Omega$ của sóng điện từ (Trường hợp có mặt từ trường)

Đồ thị trên hình 2.11 và hình 2.12 là đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa hệ số hấp thụ sóng điện từ vào năng lượng $\hbar\Omega$ của sóng điện từ cho hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường, sự phụ thuộc này là phi tuyến. Ở đồ thị trên hình 3.5, phổ hấp thụ là liên tục (vắng mặt từ trường) còn ở đồ thị trên hình 3.6 phổ hấp thụ là gián đoạn (phổ vạch). Sự khác biệt này có thể được giải thích như sau: khi có mặt từ trường, phổ năng lượng của điện tử là hoàn toàn bị gián đoạn, vì vậy mức Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ bị ràng buộc bởi điều kiện:

$$\hbar\omega_p (n' - n) + \hbar\Omega_B (N' - N) + \hbar\omega_0 - \hbar\Omega = 0 \quad (2.110)$$

dẫn tới phổ hấp thụ của hệ số hấp thụ sóng điện từ bao gồm các đỉnh cực hẹp, cách đều nhau. Do đó, đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào năng lượng của sóng điện từ trong siêu mạng pha tạp khi có từ trường là phổ vạch. Kết quả này hoàn toàn trái ngược với bán dẫn khối (chỉ số mức phân vùng Landau mà các điện tử nhảy tới sau quá trình hấp thụ là hoàn toàn tùy ý). Từ kết quả thu được về sự phụ thuộc hệ số hấp thụ vào E_0 và năng lượng sóng điện từ khi có mặt từ trường ở các loại siêu mạng khác nhau (hợp phần và pha tạp) là ngược nhau. Nguyên nhân của hiện tượng này là do cấu trúc mạng tinh thể và thể phụ tuần hoàn của hai loại siêu mạng này khác nhau, dẫn đến sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào cùng đại lượng khác nhau. Kết quả thu được cho thấy, có sự khác biệt về sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ giữa hai loại siêu mạng (siêu mạng hợp phần với siêu mạng pha tạp) vào cùng thông số của hệ như: nhiệt độ T , cường độ điện trường E_0 (xem phần tính số). Nguyên nhân của sự khác biệt này là do cấu trúc mạng tinh thể cũng như thành phần cấu tạo nên hai loại siêu mạng này khác nhau (xem phần tổng quan ở chương 1), dẫn đến thể siêu mạng, thể phụ tuần hoàn và mật độ trạng thái hạt tải giữa hai siêu mạng khác nhau về bản chất. Vì vậy, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào cùng thông số của hệ ở hai loại siêu mạng này khác nhau.

Kết luận:

Các kết quả thu được khi nghiên cứu hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng pha tạp như sau:

Xây dựng được các phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp, cho hai trường hợp có mặt và không có mặt từ trường đặt vào hệ. Thiết lập công thức tổng quát tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp, cho hai trường hợp có và không có từ trường ngoài. Tìm được biểu thức giải tích hệ số hấp thụ sóng điện từ cho các trường hợp giới hạn.

Tính toán số, vẽ đồ thị sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số của hệ cho trường hợp, có và không có từ trường. Kết quả cho thấy rõ sự khác biệt giữa siêu mạng pha tạp với bán dẫn khối. Cụ thể, hệ số hấp thụ trong siêu mạng pha tạp ngoài sự phụ thuộc rất mạnh và phi tuyến vào các tham số của hệ giống như bán dẫn khối. Hệ số hấp thụ sóng điện từ trong siêu mạng pha tạp còn phụ thuộc phi tuyến vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử như các chỉ số mini vùng n, n' , chu kỳ siêu mạng d , số chu kỳ siêu mạng N , nồng độ pha tạp n_D . Đồng thời hệ số hấp thụ phi tuyến trong trường hợp có từ trường lớn hơn so với trường hợp không có từ trường.

Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào năng lượng của sóng điện từ cho hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường cũng rất khác nhau (phổ hấp thụ là liên tục đối với trường hợp không có từ trường và gián đoạn khi có từ trường). Kết quả này hoàn toàn trái ngược với bán dẫn khối (chỉ số mức phân vùng Landau mà các điện tử nhảy tới sau quá trình hấp thụ là hoàn toàn tùy ý). Đây chính là nguyên nhân gây ra sự khác biệt giữa siêu mạng pha tạp với bán dẫn khối thông thường.

Chỉ ra nguyên nhân gây ra sự khác biệt về sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ giữa hai loại bán dẫn siêu mạng (siêu mạng hợp phần và siêu mạng pha tạp) vào cùng một thông số của hệ (nhiệt độ T , cường độ điện trường E_0 , năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega, \dots$).

2.3. HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG GIẾNG LƯỢNG TỬ

Giếng lượng tử (quantum wells) là vật liệu bán dẫn được cấu tạo từ một lớp mỏng bán dẫn đồng chất đặt giữa hai bán dẫn khác như AlGaAs-GaAs-AlGaAs. Các bán dẫn này có hằng số mạng xấp xỉ bằng nhau, có cấu trúc tinh thể tương đối giống nhau. Điện tử trong giếng lượng tử bán dẫn (giếng lượng tử) thuộc hệ điện tử chuẩn hai chiều. Đã có nhiều công trình nghiên cứu về sự hấp thụ sóng điện tử trong giếng lượng tử bán dẫn [18, 23, 24, 25]. Tuy nhiên, các công trình này chỉ nghiên cứu hiệu ứng hấp thụ *tuyến tính* mà chưa đề cập tới các hiệu ứng hấp thụ *phi tuyến* sóng điện tử trong giếng lượng tử bán dẫn. Trong mục này, để hoàn thiện lý thuyết lượng tử về sự hấp thụ sóng điện tử trong giếng lượng tử, chúng tôi giới thiệu lý thuyết hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử [12].

2.3.1. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon tương tác trong giếng lượng tử

Mật độ điện tử và phổ năng lượng của điện tử trong giếng lượng tử bị lượng tử hóa. Gọi z là trục lượng tử hóa, Hamiltonian tương tác điện tử-phonon trong giếng lượng tử khi có mặt trường sóng điện tử ngoài $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ được viết như sau:

$$H = \sum_{n, \vec{k}_1} \varepsilon_n \left(\vec{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n, \vec{k}_1}^+ a_{n, \vec{k}_1} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}} \sum_{n, n', \vec{k}_1} C_{\vec{q}} I_{n, n'}(\vec{q}_z) a_{n', \vec{k}_1 + \vec{q}}^+ a_{n, \vec{k}_1} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+) \quad (2.111)$$

với $\vec{A}(t)$ là thế vector của trường điện từ. $C_{\vec{q}}$ là hằng số tương tác điện tử - phonon, phụ thuộc từng cơ chế tán xạ. Trường hợp tương tác điện tử - phonon quang:

$$|C_{\vec{q}}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{\vec{q}}}{V_0 \varepsilon_0 (q_1^2 + q_z^2)} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \quad (2.112)$$

Trường hợp tương tác điện tử-phonon âm:

$$|D_{\vec{q}}|^2 = \frac{\xi^2 \hbar \vec{q}}{\rho v_s V_0} \quad (2.113)$$

Thừa số dạng điện tử trong giếng lượng tử có thể viết:

$$I_{n,n'}(q_z) = \frac{2}{L} \int_0^L \psi_n^*(z) \psi_{n'}(z) \exp(iq_z z) dz \quad (2.114)$$

với $\psi_n(z)$ là hàm sóng của trạng thái thứ n trong hố thế biệt lập; L là độ rộng của giếng lượng tử. Phổ năng lượng của điện tử xác định bởi công thức:

$$\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_\perp^2 + k_z^{n^2}) \quad (2.115)$$

Trong đó $k_z^n = n\pi/L$ và n là các số lượng tử đặc trưng cho sự giam cầm của điện tử.

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài:

Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong biểu diễn lượng tử hóa lần thứ hai dưới tác dụng của trường laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ đặt vuông góc với từ trường $\vec{B}$ có thể viết dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} H_B = & \sum_{n,N,\vec{k}_\perp} \varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp}^H a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_0 b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} \\ & + \sum_{n,N,n',N'} \sum_{\vec{q},\vec{k}_\perp} C_{\vec{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) a_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+) \end{aligned} \quad (2.116)$$

ở đây, $(n, N, \vec{k}_\perp)$ và $(n', N', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp)$ là trạng thái của điện tử trước và sau tán xạ; $a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+$ và $a_{n,N,\vec{k}_\perp}$ là các toán tử sinh hủy điện tử ở trạng thái $(n, N, \vec{k}_\perp)$; $(b_{\vec{q}_\perp}^+$ và $b_{\vec{q}_\perp}$) là các toán tử sinh hủy phonon ở trạng thái $\vec{q} = (\vec{q}_\perp, q_z)$; $\hbar \omega_0$ là năng lượng phonon quang; $\vec{A}(t)$ là thế vector của

trường điện từ laser. Khi có mặt từ trường, phổ năng lượng của điện tử xác định bởi biểu thức:

$$\varepsilon_{n,N}^H = \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m^* L^2} \quad (2.117)$$

trong đó $\Omega_B = \frac{eB}{m^* c}$ là tần số cyclotron của từ trường ngoài; hằng số tương tác điện tử-phonon quang và thừa số dạng điện tử được tính như các công thức (2.114), thừa số $J_{N,N'}(u)$ có dạng:

$$J_{N,N'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \phi_{N'}(\vec{r}_{\perp} - a_c^2 \vec{p}_{\perp} - a_c^2 \vec{q}_{\perp}) e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} \phi_N(\vec{r}_{\perp} - a_c^2 \vec{p}_{\perp}) \quad (2.118)$$

với $u = \frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2$, a_c là bán kính vector của điện tử trên mặt phẳng (x,y), $\vec{r}_{\perp}$ là vị trí của điện tử trên mặt phẳng (x,y), $\phi_n(z)$ là hàm sóng trong giếng lượng tử cô lập.

2.3.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong giếng lượng tử

Để xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong giếng lượng tử, chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt (hàm phân bố điện tử)

$$n_{n,\vec{k}_{\perp}} = \left\langle a_{n,\vec{k}_{\perp}}^+ a_{n,\vec{k}_{\perp}} \right\rangle_t [3]:$$

$$i\hbar \frac{\partial \left\langle a_{n,\vec{k}_{\perp}}^+ a_{n,\vec{k}_{\perp}} \right\rangle_t}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial n_{n,\vec{k}_{\perp}}}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n,\vec{k}_{\perp}}^+ a_{n,\vec{k}_{\perp}}, H \right] \right\rangle_t \quad (2.119)$$

với $\langle \psi \rangle_t$ là trung bình thống kê của toán tử ψ ; $\langle \psi \rangle_t = Tr(\hat{w} \hat{\psi})$;

$\hat{w}$ là toán tử ma trận mật độ. Sử dụng Hamiltonian (2.111) và phương trình (2.119), ta xét các số hạng có mặt trong biểu thức (2.119) như sau:

Số hạng thứ nhất:

$$\begin{aligned} \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, H_e \right] &= \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, \sum_{n',\bar{k}_\perp} \varepsilon_{n'} \left(\bar{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) a_{n',\bar{k}_\perp}^+ a_{n',\bar{k}_\perp} \right] \\ &= \sum_{n',\bar{k}_\perp} \varepsilon_{n'} \left(\bar{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, a_{n',\bar{k}_\perp}^+ a_{n',\bar{k}_\perp} \right] = 0 \end{aligned}$$

Số hạng thứ hai:

$$\left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, H_{oph} \right] = \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, \sum_{\bar{q}} \hbar \omega_{\bar{q}} b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} \right] = 0$$

Số hạng thứ ba:

$$\begin{aligned} \left[a_{n,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,\bar{k}_\perp}, H_{e-oph} \right] &= \sum_{n',\bar{k}_\perp} C_{\bar{q}} I_{n,n'} \left[F_{n',\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp;n,\bar{k}_\perp;\bar{q}}(t) + F_{n,\bar{k}_\perp;n',\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp;\bar{q}}^*(t) - \right. \\ &\quad \left. - F_{n,\bar{k}_\perp;n',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp;\bar{q}}(t) - F_{n',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp;n,\bar{k}_\perp;-\bar{q}}^*(t) \right] \end{aligned}$$

trong đó, $F_{n_1,\bar{k}_1;n_2,\bar{k}_2;\bar{q}}(t) = \left\langle a_{n_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}} \right\rangle_t$. Thay các số hạng tính được vào (4.9), ta nhận được phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n,\bar{k}_\perp}}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} \sum_{n',\bar{q}_\perp} C_{\bar{q}} I_{n,n'}(q_z) \left[F_{n',\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp;n,\bar{k}_\perp;\bar{q}}(t) + F_{n,\bar{k}_\perp;n',\bar{k}_\perp+\bar{q}_\perp;\bar{q}}^*(t) \right. \\ &\quad \left. - F_{n,\bar{k}_\perp;n',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp;\bar{q}}(t) - F_{n',\bar{k}_\perp-\bar{q}_\perp;n,\bar{k}_\perp;-\bar{q}}^*(t) \right] \end{aligned} \quad (2.120)$$

Tính đại lượng $F_{n_1,\bar{k}_1;n_2,\bar{k}_2;\bar{q}}(t)$, bằng cách xây dựng phương trình động lượng tử cho $F_{n_1,\bar{k}_1;n_2,\bar{k}_2;\bar{q}}(t)$. Ta có:

$$i\hbar \frac{\partial \left\langle a_{n_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}} \right\rangle_t}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}, H \right] \right\rangle_t \quad (2.121)$$

Sử dụng các tính chất của giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy điện tử và phonon, chúng ta thu được phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong giếng lượng tử:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{n,\bar{k}_\perp}(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar^2} \sum_{n',\bar{q}_\perp} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,n'}|^2 \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} J_k \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2} \right) J_s \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2} \right) e^{-i(s-k)\Omega t} \\
& \times \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar \right) (t-t') \right] \right. \\
& \times \left[n_{n,\bar{k}_\perp}(t') N_{\bar{q}} - n_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}(t') (N_{\bar{q}} + 1) \right] + \left[n_{n,\bar{k}_\perp}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}(t') N_{\bar{q}} \right] \\
& \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} - \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar \right) (t-t') \right] \\
& - \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} + \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar \right) (t-t') \right] \\
& \times \left[n_{n',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n,\bar{k}_\perp}(t') N_{\bar{q}} \right] - \left[n_{n',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n,\bar{k}_\perp}(t') N_{\bar{q}} \right] \\
& \left. \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n',\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} - \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar \right) (t-t') \right] \right\} \quad (2.122)
\end{aligned}$$

Tương tự như trong trường hợp của bán dẫn khối, để giải phương trình (2.122) chúng ta sử dụng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp [48]. Cụ thể, chúng ta đặt:

$$n_{n,\bar{k}_\perp}(t) \approx \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp}; \quad n_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp}(t) \approx \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp}; \quad n_{n,\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}(t) \approx \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}$$

ở đây, $\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp}$ là hàm phân bố cân bằng của điện tử. Khi đó, tích phân hai vế của phương trình (2.122) theo t , tiếp theo lấy tích phân hai vế theo t' , ta được:

$$\begin{aligned}
n_{n,\bar{k}_\perp}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{q,n'} |I_{n,n'}|^2 |C_{\bar{q}}|^2 \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} J_k \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2} \right) J_{l+k} \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m\Omega^2} \right) \frac{\hbar}{l\Omega} \exp(-ik\Omega t) \\
& \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar} - \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n',\bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} + \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1)}{\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} - \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar} + \frac{\bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} (N_{\bar{q}} + 1) - \bar{n}_{n,\bar{k}_\perp} N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\bar{k}_\perp} - \varepsilon_{n,\bar{k}_\perp - \bar{q}_\perp} + \hbar\omega_0 - k\hbar\Omega + i\delta\hbar} \Bigg\} \quad (2.123)$$

Trong công thức (2.123) thì $N_{\bar{q}} \equiv N_{\bar{q}_\perp}$ là hàm phân bố cân bằng phonon trong giếng lượng tử. Phương trình này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử.

Khi có mặt từ trường ngoài:

Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trường hợp này là:

$$i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_\perp}}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_e \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_{oph} \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_{e-ph} \right] \right\rangle_t \quad (2.124)$$

Sử dụng các hệ thức phản giao hoán và đại số toán tử, ta được:

Số hạng thứ nhất của (2.124):

$$\left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_e \right] = \sum_{n_1, N_1, \bar{k}_\perp} \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\bar{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, a_{n_1, N_1, \bar{k}_\perp}^+ a_{n_1, N_1, \bar{k}_\perp} \right] = 0$$

Số hạng thứ hai của (2.124):

$$\left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_{oph} \right] = \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, \sum_{\bar{q}} \hbar\omega_0 b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} \right] = \sum_{\bar{q}} \hbar\omega_0 \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} \right] = 0$$

Số hạng thứ ba của (2.124):

$$\begin{aligned} \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, H_{e-ph} \right] \right\rangle_t &= \left\langle \sum_{n, N, n', N'} \sum_{\bar{q}, \bar{k}_\perp} C_{\bar{q}} I_{n, n'}(q_z) J_{N, N'}(u) \right. \\ &\times \left. \left[a_{n,N,\bar{k}_\perp}^+ a_{n,N,\bar{k}_\perp}, a_{n', N', \bar{k}_\perp + \bar{q}_\perp}^+ a_{n', N', \bar{k}_\perp} \right] (b_{-\bar{q}}^+ + b_{\bar{q}}) \right\rangle_t \end{aligned}$$

Sử dụng các hệ thức phản giao hoán tử và đại số toán tử, chúng ta nhận được:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1}, H_{e-ph} \right] \right\rangle_t &= \sum_{n',N',\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) \left[F_{n,N,\bar{k}_1;n',N',\bar{k}_1-\bar{q};\bar{q}}(t) \right. \\ &\quad \left. + F_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q};n,N,\bar{k}_1,-\bar{q}}^*(t) - F_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q};n,N,\bar{k}_1,\bar{q}}(t) - F_{n,N,\bar{k}_1,n',N',\bar{k}_1+\bar{q},-\bar{q}}^*(t) \right] \end{aligned} \quad (2.125)$$

trong đó, $F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(t) = \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}} \right\rangle_t$, biểu thức (2.124) viết lại:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_1}}{\partial t} &= \sum_{n',N',\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) \left[F_{n,N,\bar{k}_1;n',N',\bar{k}_1-\bar{q};\bar{q}}(t) \right. \\ &\quad \left. + F_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q};n,N,\bar{k}_1,-\bar{q}}^*(t) - F_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q};n,N,\bar{k}_1,\bar{q}}(t) - F_{n,N,\bar{k}_1,n',N',\bar{k}_1+\bar{q},-\bar{q}}^*(t) \right] \end{aligned} \quad (2.126)$$

Hoàn toàn tương tự như cách thiết lập phương trình động lượng tử cho toán tử $a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}$, ta có:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}}{\partial t} &= \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}, H_e \right] \right\rangle_t \\ &\quad + \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}, H_{oph} \right] \right\rangle_t + \left\langle \left[a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{\bar{q}}, H_{e-oph} \right] \right\rangle_t \end{aligned} \quad (2.127)$$

Tương tự như cách làm ở trên, lần lượt tính các số hạng ở vế phải của (2.127), sau đó, thay kết quả của từng số hạng vào (2.126), ta được:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(t)}{\partial t} &= F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,\bar{q}}(t) \left[\varepsilon_{n_2,N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{n_1,N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] + \sum_{n',N',\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[I_{n,n'}(q_z) J_{N,N'}(u) \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times b_{\vec{q}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \Bigg\rangle_t - I_{n_1, n} (q_z) J_{N_1, N} (u) \left\langle a_{n_1, N_1, \vec{k}_1}^+ a_{n, N, \vec{k}_2} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{q}} \right\rangle_t \Bigg] \quad (2.128)$$

Giải phương trình (2.128) bằng phương pháp biến thiên hằng số với giả thiết đoạn nhiệt:

$$\ln \left[F_{n_1, N_1, \vec{k}_1, n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}} (-\infty) \right] = 0$$

Giải phương trình thuần nhất, áp dụng điều kiện đoạn nhiệt, thu được

$$F_{n_1, N_1, \vec{k}_1, n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}}^0 (t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\vec{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\vec{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] dt_1 \right\} \quad (2.129)$$

Suy ra nghiệm của phương trình không thuần nhất (2.128), có dạng:

$$F_{n_1, N_1, \vec{k}_1, n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}} (t) = B(t) F_{n_1, N_1, \vec{k}_1, n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}}^0 (t) \quad (2.130)$$

Đạo hàm hai vế phương trình (2.130), ta được:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_{n_1, N_1, \vec{k}_1, n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}} (t) = i\hbar \frac{\partial B(t)}{\partial t} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\hbar \omega_0 + \varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\vec{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\vec{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] dt_1 \right\} + \left[\hbar \omega_0 + \varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\vec{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\vec{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] F_{n_1, N_1, \vec{k}_1, n_2, N_2, \vec{k}_2, \vec{q}} (t) \quad (2.131)$$

So sánh (2.131) với (2.128), ta được:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial B(t)}{\partial t} = & \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \left[\varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t_1) \right) - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) + \hbar \omega_0 \right] dt_1 \right\} \\
 & \times \left\{ \sum_{n, N, \bar{q}} C_{\bar{q}} \left[I_{n, n_2}(q_z) J_{N, N_2}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1}^+ a_{n, N, \bar{k}_2 - \bar{q}_\perp} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_t \right. \right. \\
 & \left. \left. - I_{n_1, n}(q_z) J_{N_1, N}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1 + \bar{q}_\perp}^+ a_{n, N, \bar{k}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_t \right] \right\} \quad (2.132)
 \end{aligned}$$

Tích phân hai vế (2.132), ta được $B(t)$. Thay $B(t)$ và (2.129) vào (2.130), ta được

$$\begin{aligned}
 F_{n_1, N_1, \bar{k}_1, n_2, N_2, \bar{k}_2, \bar{q}}(t) = & -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_1} \left[\varepsilon_{n_2, N_2}^H \left(\bar{k}_2 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t_2) \right) + \hbar \omega_0 - \varepsilon_{n_1, N_1}^H \right. \right. \\
 & \times \left. \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t_2) \right) \right] dt_2 \left. \right\} \left\{ \sum_{n, N, \bar{q}} C_{\bar{q}} \left[I_{n, n_2}(q_z) J_{N, N_2}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1}^+ a_{n, N, \bar{k}_2 - \bar{q}_\perp} b_{\bar{q}} \right. \right. \right. \\
 & \times \left. \left. (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_{t_1} - I_{n_1, n}(q_z) J_{N_1, N}(u) \left\langle a_{n_1, N_1, \bar{k}_1 + \bar{q}_\perp}^+ a_{n, N, \bar{k}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_{t_1} \right] \right\} dt_1 \quad (2.133)
 \end{aligned}$$

Sử dụng các công thức:

$$\left\langle b_{q_1}^+ b_{q_2} \right\rangle_t = N_{q_1} \delta_{q_1, q_2}; \quad \left\langle b_{q_1} b_{q_2}^+ \right\rangle_t = (N_{q_1} + 1) \delta_{q_1, q_2}; \quad (2.134)$$

$$\left\langle a_{n, N, \bar{k}}^+ a_{n', N', \bar{k}'} \right\rangle_t = n_{n, N, \bar{k}} \delta_{n, n'} \delta_{N, N'} \delta_{\bar{k}, \bar{k}'}; \quad n_{n, N, \bar{k}}(t) \approx \bar{n}_{n, N, \bar{k}_\perp}$$

Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong giếng lượng tử:

$$\frac{\partial n_{n, N, \bar{k}_\perp}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\bar{q}, n, N'} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, n'}|^2 |J_{N, N'}|^2 \sum_{l, s=-\infty}^{\infty} J_l \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m \Omega^2} \right) J_s \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_\perp}{m \Omega^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp[-i(s-l)\Omega] \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp} - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \right. \\
& \times \left[n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') N_{\vec{q}} - n_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') (N_{\vec{q}}+1) \right] + \left[n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') (N_{\vec{q}}+1) - n_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') N_{\vec{q}} \right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp} + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \\
& - \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}^H - \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \\
& - \left[n_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') N_{\vec{q}} - n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') (N_{\vec{q}}+1) \right] - \left[n_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') (N_{\vec{q}}+1) - n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') N_{\vec{q}} \right] \\
& \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp}^H - \varepsilon_{n,N,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}^H + \hbar\omega_0 - l\hbar\Omega + i\hbar\delta \right) (t-t') \right] \quad (2.135)
\end{aligned}$$

với E_0 , Ω là biên độ điện trường và tần số của sóng điện từ.

2.3.3. Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử

Xét trường hợp vắng mặt từ trường ngoài với cơ chế tán xạ điện tử-phonon quang:

Trong trường hợp này, để tính được hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử, trước tiên chúng ta đi tìm biểu thức tường minh của mật độ dòng hạt tải theo hàm phân bố không cân bằng điện tử trong $n_{n,\vec{k}_\perp}(t)$:

$$\vec{J}_\perp(t) = \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n,\vec{k}_\perp} \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) n_{n,\vec{k}_\perp}(t) \quad (2.136)$$

Đặt $n_0 = \sum_{n,\vec{k}_\perp} \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp}$ là mật độ điện tử trong giếng lượng tử. Vì chuyển

động của điện tử bị hạn chế theo hướng z, và chuyển động tự do trong mặt phẳng x,y. Do đó, chúng ta chỉ tính biểu thức vector mật độ dòng trong mặt phẳng x,y.

$$\bar{J}_{\perp}(t) = -\frac{e^2}{m^*c} \sum_{n, \bar{k}_{\perp}} \bar{A}(t) n_{n, \bar{k}_{\perp}}(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{j}_l \sin(\Omega t) \quad (2.137)$$

Trong biểu thức (2.137), thì:

$$\begin{aligned} \bar{j}_l = & \frac{2\pi e \hbar^2}{m^* l \Omega} \sum_{n, n'} \sum_{\bar{k}_{\perp}, \bar{q}_{\perp}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, n'}|^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \bar{q}_{\perp} J_s \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) \left[J_{s+l} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) + J_{s-l} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) \right] \\ & \times N_{\bar{q}} \left(\bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp}} - \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} \right) \delta \left(\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega \right) \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\text{và } \bar{A}(t) = -\bar{E}_0 c \int \sin(\Omega t) dt = \frac{\bar{E}_0 c}{\Omega} \cos(\Omega t) \quad (2.139)$$

Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh được xác định bởi công thức

$$\alpha = \frac{8\pi}{c \sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left\langle \bar{J}_{\perp}(t) \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle, \quad (2.140)$$

Đặt (2.136) vào (2.140), đổi biến, $\bar{k}_{\perp} \rightarrow \bar{k}_{\perp} - \bar{q}_{\perp}$; $k \rightarrow -k$ $\bar{q} \rightarrow -\bar{q}$; $n \rightarrow n'$, và sử dụng công thức gần đúng trong [54]:

$$j_{k+1}(x) + j_{k-1}(x) \approx \frac{2k}{x} j_k(x); N_{\bar{q}} = \frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \quad (2.141)$$

Biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong giếng lượng tử được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{8\pi}{c \sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left\langle \bar{J}_{\perp}(t) \bar{E}_0 \sin \Omega t \right\rangle = \frac{16\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, n'} \sum_{\bar{q}_{\perp}, \bar{k}_{\perp}} \sum_{l=1}^{\infty} |I_{n, n'}|^2 \\ & \times \left(\bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp}} - \bar{n}_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} \right) \frac{k J_l^2}{q^2} \delta \left(\varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp} + \bar{q}_{\perp}} - \varepsilon_{n, \bar{k}_{\perp}} + \hbar \omega_0 - l \hbar \Omega \right) + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \end{aligned} \quad (2.142)$$

Trong biểu thức (2.142), $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ có nghĩa là số hạng thứ hai thu được từ số hạng thứ nhất nếu thay $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$. Biểu thức (2.142), cho thấy hệ số hấp thụ sóng điện từ trong giếng lượng tử phụ thuộc phi tuyến vào các thông số của hệ giống như bán dẫn khối. Đồng thời, nó

còn phụ thuộc mạnh vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử, như chỉ số mini vùng n, n' độ rộng L của giếng lượng tử. Tiếp theo, chúng ta tính toán hệ số hấp thụ sóng điện từ cho hai trường hợp giới hạn: hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Trường hợp này, phải thỏa mãn điều kiện: $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_0| \ll \bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon}$ là năng lượng trung bình chuyển động nhiệt của điện tử). Xét trường hợp hấp thụ một photon, dựa vào hàm phân bố cân bằng của điện tử theo phân bố Boltzmann (xét khí điện tử không suy biến):

$$\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} = n_0^* \exp\left(-\frac{\varepsilon_{n,\vec{k}_\perp}}{kT}\right) \text{ với } n_0^* = \frac{n_0 e^{3/2} \pi^{3/2} \hbar^3}{Vm^{*3/2} (k_B T)^{3/2}} \quad (2.143)$$

Tách tổng trên thành hai tổng riêng rẽ theo $\vec{k}_\perp$ và $\vec{q}_\perp$. Theo vector $\vec{k}_\perp$, ta sử dụng các công thức biến đổi [54]:

$$\sum_{\vec{k}_\perp} (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[\varphi(x)] dx = \sum \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}; \quad \varphi(x_i) = 0$$

Theo vector $\vec{q}_\perp$, ta sử dụng các công thức biến đổi sau:

$$\sum_{\vec{q}} (...) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \vec{q}_\perp d\vec{q}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dq_z$$

và sử dụng các kết quả, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8}$

Kết quả biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử được viết như sau:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\pi L} \sum_{n,n'} \exp\left(-\frac{\pi^2 n'^2}{2m^* k_B T L^2}\right) \left[\exp\left(\frac{1-\xi}{k_B T} \hbar \Omega\right) - 1 \right] \left\{ 1 + \beta \frac{3k_B T}{8\hbar \Omega} \right. \\ \times \left[1 + \frac{1}{2k_B T} \left(\hbar \Omega (\xi - 1) + \frac{\pi^2 (n'^2 - n^2) \hbar^2}{2m^* L^2} \right) \right] \left. \right\} + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \quad (2.144)$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi e^4 n_0^* (k_B T)^2}{2\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 \hbar^4} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \quad (2.145)$$

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này, phải có điều kiện: $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_0| \gg \bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon}$ là năng lượng trung bình chuyển động nhiệt của điện tử). Điều này có nghĩa là các kết quả cho vector mật độ dòng $\vec{J}_\perp(t)$ và hệ số hấp thụ phi tuyến không phụ thuộc vào hàm phân bố điện tử. Mặt khác, vì hàm δ không phụ thuộc vào các vector $\vec{k}_\perp$. Do đó, ta có thể bỏ qua các vector $\vec{k}_\perp$ và $\vec{q}_\perp$ trong công thức (2.142). Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ (hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ) có dạng:

$$\alpha = \frac{\alpha_0^*}{\pi L} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar \Omega}{k_B T} (k - \xi)\right) \right] \sum_{n', k=1}^{\infty} \theta(k - \xi) \frac{k}{k - \xi - a} \\ \times F_k \sqrt{2\beta(k - \xi - a)} + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \quad (2.146)$$

với,

$$\alpha_0^* = \frac{8\pi^3 e^2 k_B T n_0}{\varepsilon_0 m^* c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2 \hbar} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right); \quad \xi = \frac{\omega_0}{\Omega}; \quad a = \frac{\pi^2 n'^2 \hbar}{2m^* L^2 \Omega}; \quad \beta = \frac{e^2 E_0^2}{m^* \hbar \Omega^3};$$

$F_k(x) = J_k^2(x)$; $\theta(x)$ là hàm số bước đơn vị, $\theta(x) = 1$ khi $x > 0$ và $\theta(x) = 0$ khi $x < 0$.

Đối với trường hợp không có từ trường ngoài và cơ chế tán xạ điện tử - phonon âm:

Đối với trường hợp này, việc xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử giống như trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang. Tuy nhiên, hằng số tương tác điện tử - phonon quang C_q được thay thế bằng hằng số tương tác điện tử - phonon âm D_q và tần số phonon quang ω_0 được thay thế bằng tần số phonon âm ω_q . Sử dụng phương pháp tương tự như trường hợp tán xạ điện tử phonon quang, chúng ta thiết lập được phương trình động lượng tử cho điện tử, từ đó tìm được biểu thức giải tích tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong giếng lượng tử như sau:

$$\alpha = \frac{(k_B T)^3 e^2 m^* n_0 \xi^2}{c \sqrt{\chi_\infty} v_s^2 \rho \hbar^6 \Omega^3 L} \sum_{m'} \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(\frac{\pi^2 (n'^2 - n^2) \hbar^2}{2m^* L^2} \right) \right] \left[\exp \left(\frac{\hbar \Omega}{k_B T} \right) - 1 \right] \\ \times \left\{ 1 + \frac{\gamma}{2k_B T} + \frac{3}{32} \frac{e E_0^2}{m^* \Omega^4 \hbar^2 k_B T} (\gamma^2 + 3\gamma k_B T + 12(k_B T)^2) \right\} \quad (2.147)$$

$$\text{với } \gamma = \frac{\pi^2 (n'^2 - n^2)}{2m^* L} - \hbar \Omega$$

Trong trường hợp giới hạn, khi số hạng tỷ lệ với cường độ sóng điện tử mạnh E_0^2 tiến tới không, thì hệ số hấp thụ phi tuyến trong (2.146) và (2.147) trở về trường hợp hấp thụ tuyến tính như đã tính bằng phương pháp Kubo-Mori [25].

2.3.4. Trường hợp có mặt từ trường ngoài

Để tìm hàm phân bố không cân bằng của điện tử trong giếng lượng tử khi có mặt từ trường ngoài, ta giải phương trình (2.112) bằng các phương pháp như đã được sử dụng ở các chương trước. Xét trường hợp khi điện tử không suy biến:

$$\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp)}{k_B T}\right) \quad (2.148)$$

Ta có:

$$\sum_{\vec{k}_\perp} (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{1}{2}m^*\Omega_B}^{\frac{1}{2}m^*\Omega_B} dk_x \int_{-\frac{1}{2}m^*\Omega_B}^{\frac{1}{2}m^*\Omega_B} dk_y = \left(\frac{m^*\Omega_B}{2\pi}\right)^2 \quad (2.149)$$

Xét trường hợp hấp thụ một photon và giới hạn các thành phần $J_k(x)$ với $k=1, 2$. Sau một vài biến đổi nhỏ, chúng ta thu được biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{e^4 n_0^* k_B T \Omega_B^3}{4\pi c \sqrt{\chi_\infty} a_c^2 \varepsilon_0 \Omega^3 \hbar^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n,n',q} \sum_{N,N'} |I_{n,n'}|^2 \left[1 + \frac{3e^2 E_0^2}{8m^{*2} a_c^2 \Omega^4} \right] \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{1}{k_B T} \left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_B - \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m^* L^2} \right] - \exp\left[-\frac{1}{k_B T} \left(N' + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_B - \frac{\pi^2 n'^2 \hbar^2}{2m^* L^2} \right] \right\} \\ & \times \frac{\hbar \sqrt{A_1 |M|}}{|M| \left(\hbar \Omega - \hbar \omega_0 + M \hbar \Omega_B + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2} (n^2 - n'^2)^2 + \hbar^2 A_1 \right)} \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\text{Trong đó, } M = N - N'; A_1 = N_0 \frac{|C_q^-|^2}{4\pi \hbar^2} \sum_{n,n',q} |I_{n,n'}|^2; N_0 = \frac{k_B T}{\hbar \omega_0} \quad (2.151)$$

Biểu thức (2.150), cho thấy: hệ số hấp thụ sóng điện từ gồm hai phần, một phần tuyến tính và một phần phi tuyến theo cường độ E_0 của sóng điện từ. Hệ số hấp thụ sóng điện từ trong giếng lượng tử ngoài việc phụ thuộc phi tuyến vào cường độ điện trường E_0 , nhiệt độ T của hệ, tần số Ω của sóng điện từ, thì nó còn phụ thuộc phi tuyến vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam giữ điện tử như, chỉ số mini vùng (n, n'); mức phân

vùng Landau N, N'; độ rộng của giếng lượng tử L. Đây là sự khác biệt giữa giếng lượng tử với bán dẫn khối thông thường.

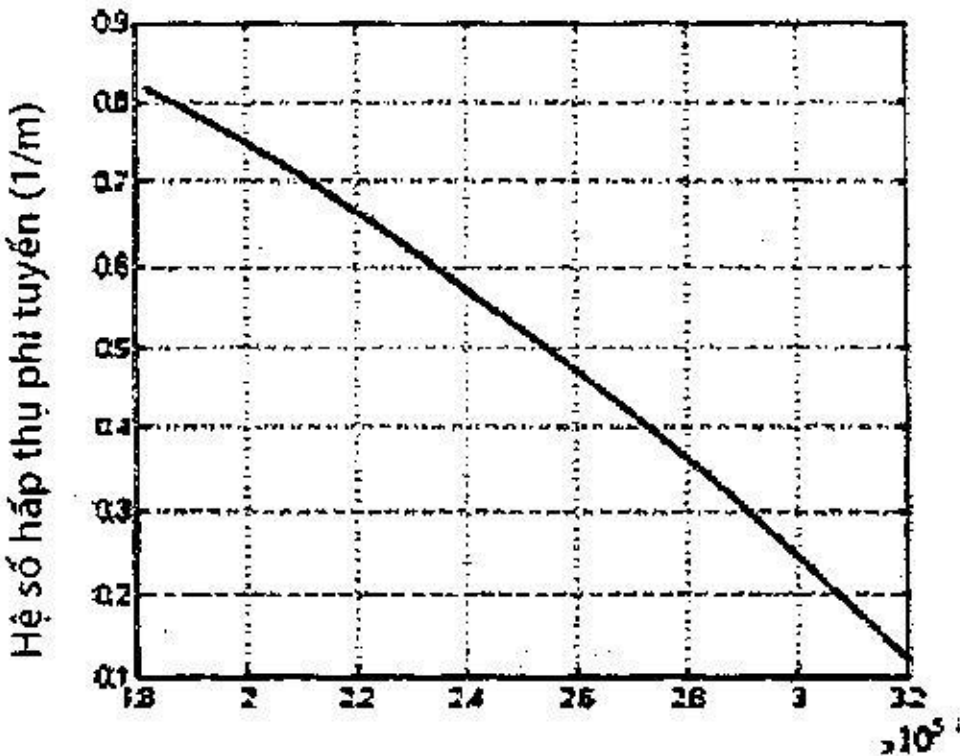
Trong trường hợp giới hạn, khi số hạng tỷ lệ với cường độ sóng điện từ mạnh E_0^2 tiến tới không, thì hệ số hấp thụ phi tuyến trong (2.150) trở về trường hợp hấp thụ tuyến tính như đã tính bằng phương pháp Kubo-Mori [25].

2.3.5. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

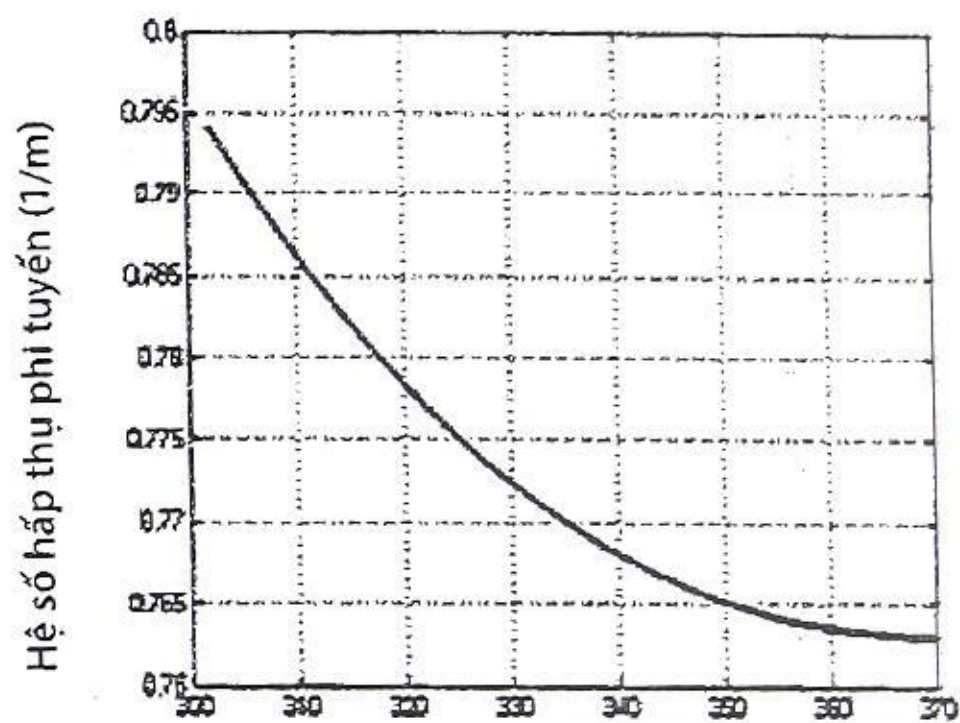
Trong mục này giới thiệu các kết quả tính toán số, vẽ đồ thị để làm rõ các kết quả tính toán lý thuyết nhận được ở trên và phân tích kết quả thu được cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong giếng lượng tử điển hình AlAs/GaAs/AlAs cho cả hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường.

Khảo sát hệ số hấp thụ trong trường hợp vắng mặt từ trường:

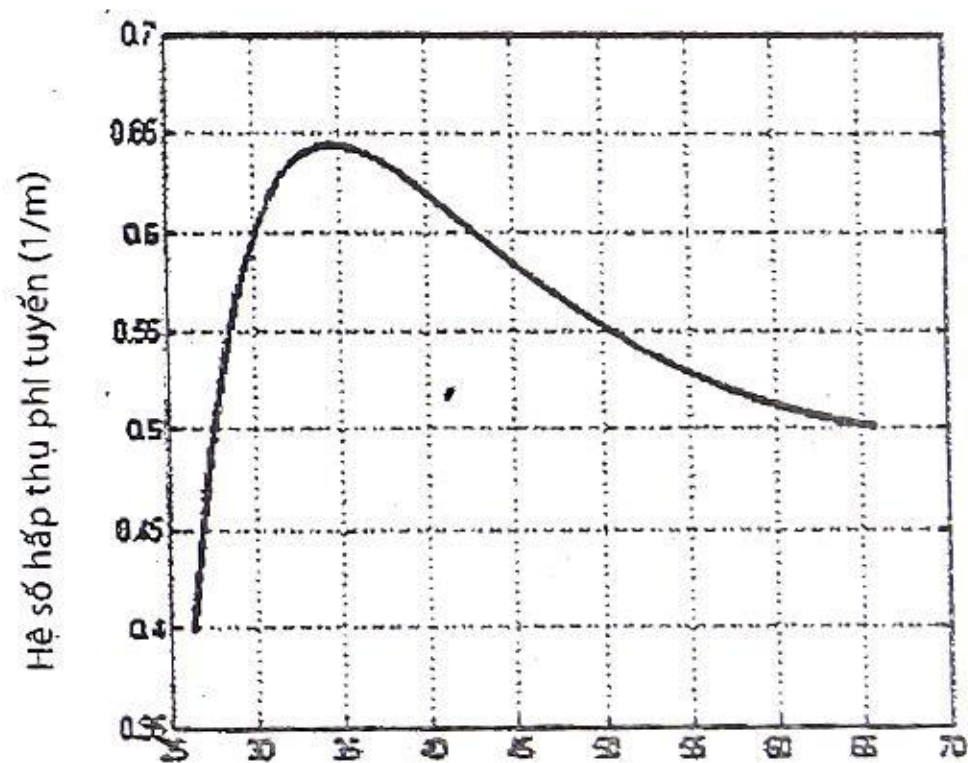
Các tham số được sử dụng để tính toán là các tham số: $\chi_\infty = 10,9$; $\chi_0 = 12,9$; $n_0 = 10^{23} \text{m}^{-3}$; $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$, $m = 0,067m_0$ (m_0 là khối lượng của điện tử), $L = 100 \text{\AA}$, $\hbar\omega_0 = 36,25 \text{meV}$; $\Omega = 5,5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$, $T = 300 \text{ K}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, $E_0 = 3,5 \cdot 10^{14} \text{ V/cm}$.



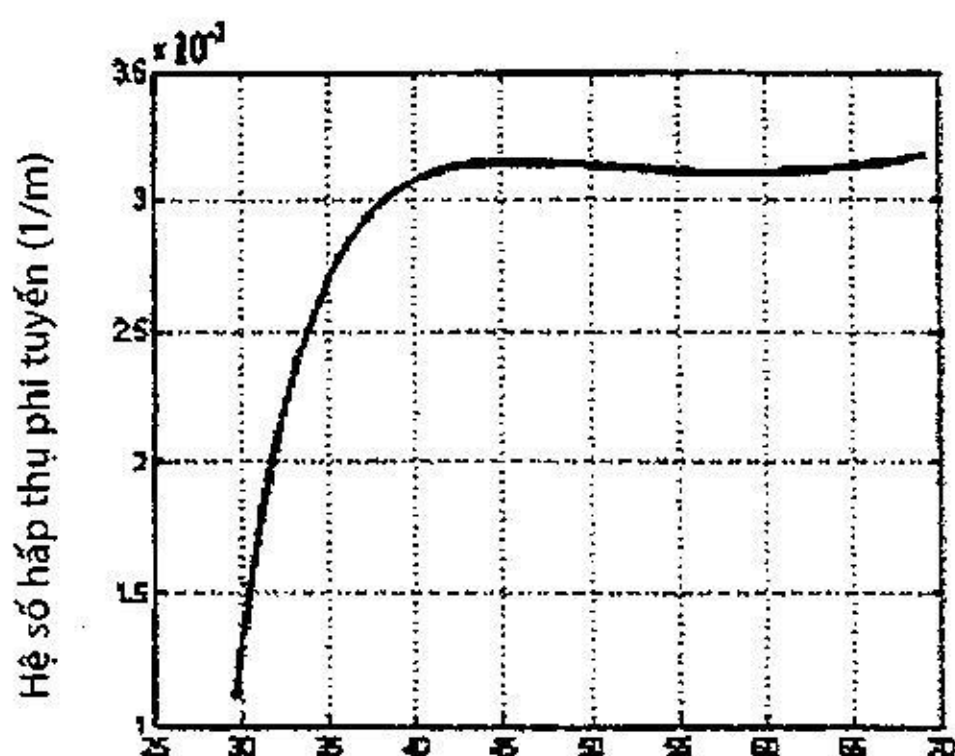
Hình 2.13: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào biên độ điện trường E_0 (hấp thụ gần ngưỡng, tương tác điện tử - phonon quang)



Hình 2.14: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào nhiệt độ T (hấp thụ gần ngưỡng, tương tác điện tử - phonon quang)



Hình 2.15: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$ (hấp thụ gần ngưỡng, tương tác điện tử - phonon quang)



Hình 2.16: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng sóng điện từ $h\Omega$ (hấp thụ gần ngưỡng, tương tác điện tử - phonon âm)

Đồ thị trên hình 2.13 và hình 2.14 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử vào biên độ điện trường E_0 và nhiệt độ T của hệ (hấp thụ gần ngưỡng). Từ các đồ thị ta thấy, khi cường độ điện trường E_0 và nhiệt độ T của hệ tăng thì hệ số hấp thụ đều giảm. Tuy nhiên, đối với bán dẫn khối thì ngược lại, hệ số hấp thụ trong hai trường hợp này tăng lên khi tăng cường độ điện trường E_0 hoặc tăng nhiệt độ T của hệ [46, 48, 59].

Đồ thị trên hình 2.15 mô tả sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh vào năng lượng của trường điện từ ngoài cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng. Đồ thị cho thấy, hệ số hấp thụ trong trường hợp này đạt giá trị cực đại khi tần số của trường điện từ bằng tần số của phonon quang ($\Omega = \omega_0$). Đồ thị trên hình 2.16 cho thấy khi năng lượng điện trường nằm trong khoảng từ 30-40 MeV, thì hệ số hấp thụ phụ thuộc phi tuyến vào năng lượng điện trường. Khi năng lượng điện trường lớn hơn 40 MeV thì hệ số hấp thụ gần như không thay đổi. Một

điểm nữa là trong trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm không xuất hiện cực đại khi tần số điện trường ngoài bằng tần số phonon quang ($\Omega = \omega_0$).

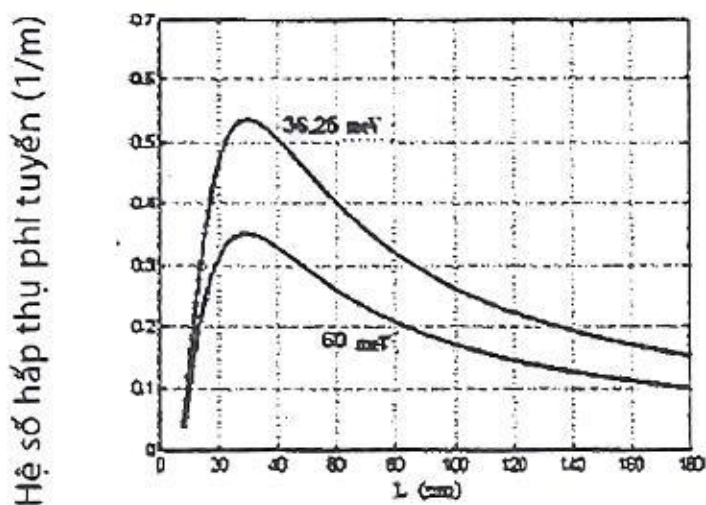
Khảo sát trong trường hợp có mặt từ trường ngoài:

Đồ thị trên hình 2.17, cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào độ rộng của giếng lượng tử khi không có mặt của từ trường ngoài. Nhìn vào đồ thị chúng ta thấy hệ số hấp thụ đạt giá trị cực đại khi độ rộng của giếng lượng tử vào cỡ 30Å và giá trị cực đại của hệ số hấp thụ phụ thuộc vào năng lượng của trường ngoài.

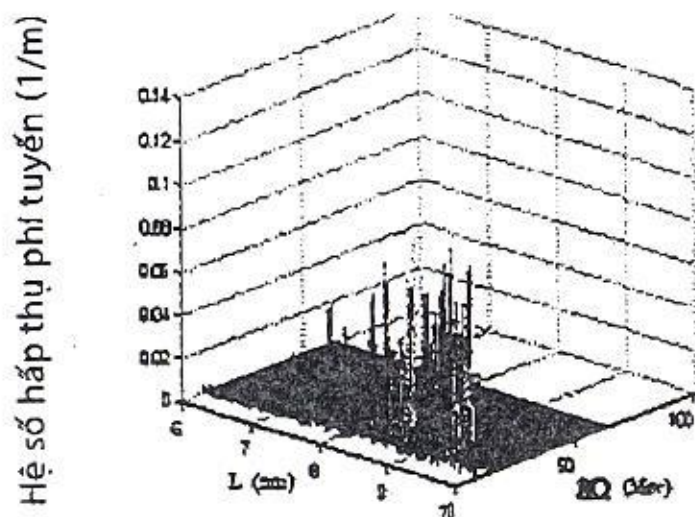
Đồ thị hình 2.18 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào độ rộng L của giếng lượng tử khi có mặt từ trường ngoài. Trường hợp này, hệ số hấp thụ xuất hiện một cực đại chính và các cực đại thứ cấp ở lân cận cực đại chính.

Đồ thị trên hình 2.19 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào năng lượng sóng điện từ. Hệ số hấp thụ có một cực đại chính và nhiều cực đại thứ cấp. Các cực đại thứ cấp nhỏ dần khi năng lượng sóng điện từ tăng lên.

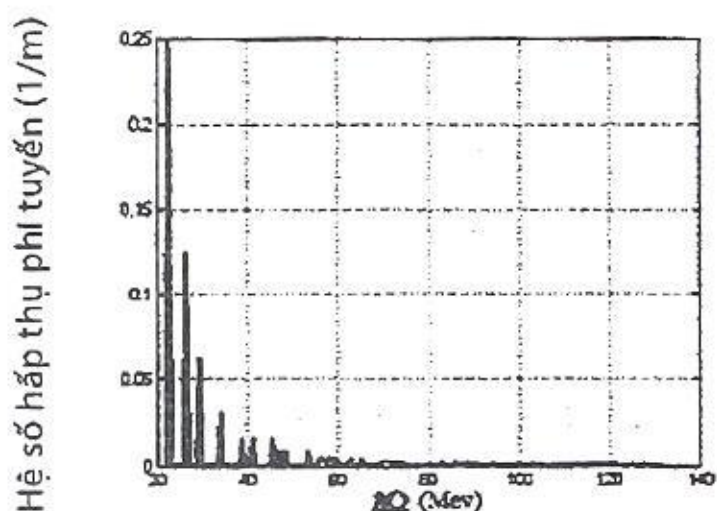
Đồ thị trên hình 2.20 cho thấy sự phụ thuộc tuyến tính (bán dẫn khối) và phi tuyến (giếng lượng tử) của hệ số hấp thụ vào năng lượng của từ trường ngoài. Từ đồ thị ta thấy, hệ số hấp thụ phi tuyến lớn hơn nhiều hấp thụ tuyến tính. Đồng thời, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến giữa hai trường hợp có từ trường và không có từ trường trái ngược nhau (trường hợp không có từ trường, hệ số hấp thụ giảm khi năng lượng sóng điện từ tăng, đối với trường hợp có từ trường thì ngược lại).



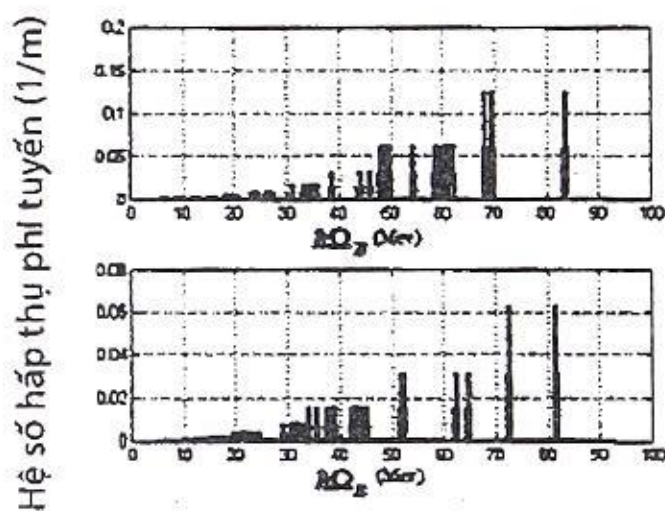
Hình 2.17: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào độ rộng L của giếng lượng tử (trường hợp không có từ trường)



Hình 2.18 Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$ và độ rộng L của giếng lượng tử (trường hợp có từ trường)



Hình 2.19: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$ (MeV)



Hình 2.20: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào năng lượng của từ trường ngoài $\hbar\Omega_B$ (MeV)

Sự khác biệt này có thể được giải thích như sau: khi có mặt từ trường, phổ năng lượng của điện tử là hoàn toàn bị gián đoạn (xem phương trình (2.117)), vì vậy mức Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ bị ràng buộc bởi điều kiện:

$$\Delta_{n,n'} + \hbar\Omega_B M - \hbar\omega_0 + \hbar\Omega = 0 \quad (2.152)$$

dẫn tới phổ hấp thụ bao gồm các đỉnh cực hẹp, cách đều nhau. Kết quả này hoàn toàn trái với bán dẫn khối (chỉ số mức phân vùng Landau mà

các điện tử nhảy tới sau quá trình hấp thụ là hoàn toàn tùy ý). Do đó, đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào năng lượng của sóng điện từ trong giếng lượng tử khi có từ trường là phổ vạch.

Từ kết quả thu được, cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ trong hệ hai chiều (siêu mạng hợp phần, siêu mạng pha tạp và giếng lượng tử) vào cùng một đại lượng (cường độ điện trường E_0 , nhiệt độ T , năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega, \dots$) rất khác nhau (xem phần tính số chương 2, 3, 4). Nguyên nhân của hiện tượng này là do cấu trúc tinh thể của các vật liệu bán dẫn hai chiều này khác nhau (xem phần tổng quan), dẫn đến các thế giam giữ điện tử trong vật liệu và thế phụ tuần hoàn của mỗi loại vật liệu hai chiều khác nhau. Vì vậy, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ trong các loại bán dẫn hai chiều vào cùng một thông số của hệ khác nhau.

Kết luận:

Nghiên cứu hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử, đã thu được các kết quả sau đây:

Xây dựng được phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm và hàm phân bố không cân bằng điện tử trong giếng lượng tử cho hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường ngoài.

Thiết lập được biểu thức giải tích tổng quát tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong giếng lượng tử cho hai trường hợp có mặt và vắng mặt từ trường. Tìm được biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh cho các trường hợp giới hạn, cho các trường hợp tán xạ điện tử-phonon (phonon quang và phonon âm) khác nhau.

Kết quả tính toán cho thấy, α gồm hai phần, một phần tuyến tính và một phần phi tuyến theo cường độ E_0 của sóng điện từ. Hệ số hấp thụ phi tuyến trong giếng lượng tử ngoài việc phụ thuộc vào cường độ điện trường E_0 , nhiệt độ T của hệ, tần số Ω của sóng điện từ và các tham số của giếng lượng tử giống như bán dẫn khối, thì nó còn phụ thuộc vào

các chỉ số mini vùng (n, n'); chỉ số phân vùng Landau; độ rộng của giếng lượng tử L .

Trường hợp có từ trường, hệ số hấp thụ phi tuyến lớn hơn nhiều so với hệ số hấp thụ tuyến tính, đồng thời sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến giữa hai trường hợp có từ trường và không có từ trường trái ngược nhau (trường hợp không có từ trường, hệ số hấp thụ giảm khi năng lượng sóng điện từ tăng, đối với trường hợp có từ trường thì ngược lại). Đây là điểm khác biệt của giếng lượng tử so với bán dẫn khối thông thường.

Chỉ ra nguyên nhân gây ra sự khác biệt về sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ giữa hai bán dẫn siêu mạng (siêu mạng hợp phần và siêu mạng pha tạp) vào cùng một thông số của hệ (nhiệt độ T , cường độ điện trường E_0 ; năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$, ...)

HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG BÁN DẪN MỘT CHIỀU

3.1. HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG DÂY LƯỢNG TỬ HÌNH TRỤ HỐ THỂ CAO VÔ HẠN

Mô hình dây lượng tử hình trụ hố thể cao vô hạn đã được sử dụng nhiều trong các nghiên cứu lý thuyết, sự lượng tử hóa do giam kích thước trong dây lượng tử tác động đáng kể đến các tính chất vật lý của hệ, các hiệu ứng động trong dây lượng tử có nhiều sự khác biệt so với bán dẫn khối cũng như hệ hai chiều. Trong chương này, trên quan điểm lý thuyết trường lượng tử, bằng phương pháp phương trình động lượng tử, chương này nghiên cứu sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thể cao vô hạn cho cả hai trường hợp vắng mặt và có mặt của từ trường. Khảo sát sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào các tham số như nhiệt độ của hệ, cường độ và tần số của sóng điện từ, tần số cyclotron (trường hợp có mặt của từ trường) và bán kính của dây. Các kết quả được đánh giá, so sánh với bài toán tương tự trong bán dẫn khối và hệ hai chiều để thấy được ảnh hưởng của hiệu ứng giam kích thước trong hệ một chiều lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ [11].

3.1.1 Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong dây lượng tử hố thể cao vô hạn

Giả sử một dây lượng tử được đặt trong trường laser có vector cường độ điện trường $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ vuông góc với phương truyền sóng. Bỏ qua tương tác của các hạt cùng loại, Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong dây lượng tử được viết như sau:

$$H = H_e + H_{ph} + H_{e-ph} \quad (3.1)$$

trong đó

$$H_e = \sum_{n,l,\vec{p}} \varepsilon_{n,l}(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t)) a_{n,l,\vec{p}}^+ a_{n,l,\vec{p}} \quad (3.2)$$

là Hamiltonian của điện tử không tương tác;

$$H_{ph} = \sum_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} \quad (3.3)$$

là Hamiltonian của phonon không tương tác;

$$H_{e-ph} = \sum_{n,l,n',l',\vec{p},\vec{q}} C_{\vec{q}} I_{n,l,n',l'}(\vec{q}) a_{n,l,\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{n',l',\vec{p}} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+) \quad (3.4)$$

là Hamiltonian tương tác điện tử-phonon; $\varepsilon_{n,l}(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t))$ là phổ năng lượng của điện tử dưới tác dụng của sóng điện từ với thế vector $\vec{A}(t)$ được viết theo biểu thức (1.41) như sau:

$$\varepsilon_{n,l}(\vec{p} - \vec{A}(t)) = \frac{(\vec{p} - \vec{A}(t))^2}{2m} + B_{n,l}^2 / 2mR^2 \quad (3.5)$$

với e là điện tích của electron, c là vận tốc ánh sáng, $\vec{E}_0$ và Ω là cường độ và tần số của sóng điện từ, $a_{n,l,\vec{p}}^+$ ($a_{n,l,\vec{p}}$) là toán tử sinh (huỷ) của một electron trong dây lượng tử $b_{\vec{q}}^+$ ($b_{\vec{q}}$) là toán tử sinh (huỷ) một phonon ở trạng thái có vector sóng $\vec{q}$, $\omega_{\vec{q}}$ là tần số của phonon, $C_{\vec{q}}$ là hệ số tương tác điện tử - phonon, $I_{n,l,n',l'}(\vec{q})$ là thừa số dạng đặc trưng cho sự giam nhốt điện tử trong dây lượng tử được cho bởi:

$$I_{n,l,n',l'}(q_{\perp}) = \frac{2}{R^2} \int_0^R J_{|n-n'|}(q_{\perp}R) \psi_{n,l}^*(r) \psi_{n',l'}(q_{\perp}R) r dr. \quad (3.6)$$

trong đó hàm sóng $\psi_{n,l}(r)$ được xác định theo (1.38) và (1.39). Do hàm sóng chứa các hàm Bessel, biểu thức của thừa số hạng (3.6) không thể tính toán giải tích, tuy nhiên theo [29] chúng ta có thể tính nó bằng cách áp dụng biểu thức gần đúng cho hàm sóng và trạng thái năng lượng của điện tử như sau:

$$\psi_{0,1} \approx \sqrt{3}(1-x^2), \quad I_{01,0,1}(q_{\perp}) = 24 \frac{J_3(q_{\perp}R)}{(q_{\perp}R)^3} \quad (3.7)$$

$$\psi_{\pm 1,1} \approx \sqrt{12}(x-x^2), \quad I_{\pm 1,1,0,1}(q_{\perp}) = 48 \frac{J_4(q_{\perp}R)}{(q_{\perp}R)^3}. \quad (3.8)$$

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài :

Giả sử có một từ trường đều đặt song song với trục của dây. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong dây lượng tử khi có mặt của từ trường được viết như sau:

$$H = \sum_{\gamma, \vec{p}} \varepsilon_{\gamma}^H(\vec{p} - \vec{A}(t)) a_{\gamma, \vec{p}}^+ a_{\gamma, \vec{p}} + \sum_{\vec{q}} \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{\gamma, \gamma', \vec{p}, \vec{q}} C_{\vec{q}} I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q}) J_{N, N'}(u) a_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^+ a_{\gamma', \vec{p}} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+), \quad (3.9)$$

trong đó γ và γ' lần lượt là các bộ số lượng tử (N, n, ℓ) và (N', n', ℓ') của điện tử dưới tác dụng của từ trường ngoài; N, N' là các chỉ số vùng Landau ($N = 0, 1, 2, \dots$), $\varepsilon_{n, \ell}^H(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t))$ là phổ năng lượng của điện tử dưới tác dụng của sóng điện từ với thể vector $\vec{A}(t)$ khi có mặt của từ trường; $a_{\gamma, \vec{p}}^+$ ($a_{\gamma, \vec{p}}$) là toán tử sinh (hủy) của một electron trong dây lượng tử khi có mặt từ trường ngoài; $J_{N, N'}(u)$ đặc trưng cho tác động của từ trường lên dây lượng tử được xác định theo tích phân như sau:

$$J_{N, N'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \phi_N(r_{\perp} - a_c^2(p_z - q_z)) e^{iq_z \tau} \phi_{N'}(r_{\perp} - a_c^2 p_z) \quad (3.10)$$

ở đây $u = a_c q_z^2 / 2$, $r_{\perp}$ và $a_c = c / eB$ lần lượt là vị trí và bán kính quỹ đạo cyclotron.

3.1.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn

Để thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử (trường hợp vắng mặt từ trường ngoài),

chúng ta bắt đầu từ phương trình động cho toán tử số hạt điện tử trong dây lượng tử $n_{n,\ell,\bar{p}}(t) = \langle a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}} \rangle_t$ ta có:

$$i \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}}, H] \rangle_t$$

$$= \langle [a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}}, H_e] \rangle_t + \langle [a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}}, H_{ph}] \rangle_t + \langle [a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}}, H_{e-ph}] \rangle_t. \quad (3.11)$$

Sử dụng Hamiltonian (3.2) - (3.4) và các phép biến đổi toán tử ta được trên cơ sở lý thuyết trường lượng tử cho hệ nhiều hạt [1]:

$$i \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = \sum_{n',\ell',\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q}) [F_{n,\ell,\bar{p},n',\ell',\bar{p}-\bar{q},\bar{q}}(t) + F_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q},n,\ell,\bar{p},-\bar{q}}^*(t)$$

$$- F_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q},n,\ell,\bar{p},\bar{q}}(t) - F_{n,\ell,\bar{p},n',\ell',\bar{p}+\bar{q},-\bar{q}}^*(t)] \quad (3.12)$$

trong đó

$$F_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1,n_2,\ell_2,\bar{p}_2,\bar{q}}(t) = \langle a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} b_{\bar{q}} \rangle_t = F(t)$$

Để tìm $F(t)$ ta xây dựng phương trình động cho $F(t)$ như sau:

$$i \frac{\partial F(t)}{\partial t} = i \frac{\partial F_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1,n_2,\ell_2,\bar{p}_2,\bar{q}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} b_{\bar{q}}, H] \rangle_t \quad (3.13)$$

Một cách tương tự chúng ta thu được:

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = i [\varepsilon_{n_1,\ell_1} (\bar{p}_1 - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) - \varepsilon_{n_2,\ell_2} (\bar{p}_2 - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) - \omega_{\bar{q}}] F(t)$$

$$+ i \sum_{n_3,\ell_3,\bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} [I_{n_1,\ell_1,n_3,\ell_3}(\bar{q}) \langle a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_1+\bar{q}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_t +$$

$$- I_{n_2,\ell_2,n_3,\ell_3} \langle a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_2-\bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_t] \quad (3.14)$$

Giải phương trình vi phân trên theo phương pháp biến phân, ta thu được biểu thức của $F(t)$:

$$F(t) = i \sum_{n_3,\ell_3,\bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \int_{-\infty}^t [I_{n_1,\ell_1,n_3,\ell_3}(\bar{q}) \langle a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_1+\bar{q}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_{t_2} -$$

$$I_{n_2, \ell_2, n_3, \ell_3}(\vec{q}) \langle a_{n_1, \ell_1, \vec{p}_1}^+ a_{n_3, \ell_3, \vec{p}_2 - \vec{q}_1} b_{\vec{q}} (b_{\vec{q}_1} + b_{-\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \times$$

$$\times \exp\{i[\varepsilon_{n_1, \ell_1}(\vec{p}_1) - \varepsilon_{n_2, \ell_2}(\vec{p}_2) - \omega_{\vec{q}}](t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{-\infty}^t (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{A}(t_1) dt_1\} dt_2 \quad (3.15)$$

Thay (3.15) vào (3.12) ta có:

$$i \frac{\partial n_{n, \ell, \vec{p}}(t)}{\partial t} = \sum_{n', \ell', \vec{q}} C_{\vec{q}} I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q}) \sum_{n_3, \ell_3, \vec{q}_1} C_{\vec{q}_1}$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^t [I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\vec{q}) \langle a_{n_3, \ell_3, \vec{p} + \vec{q}_1}^+ a_{n', \ell', \vec{p} - \vec{q}} (b_{\vec{q}_1} + b_{-\vec{q}_1}^+) b_{\vec{q}} \rangle_{t_2} \right.$$

$$- I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n, \ell, \vec{p}}^+ a_{n_3, \ell_3, \vec{p} - \vec{q} - \vec{q}_1} b_{\vec{q}} (b_{\vec{q}_1} + b_{-\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2}]$$

$$\times \exp[i(\varepsilon_{n, \ell, \vec{p}} - \varepsilon_{n', \ell', \vec{p} - \vec{q}} - \omega_{\vec{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \vec{p} \cdot \vec{A}(t_1) dt_1] dt_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^t [-I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n, \ell, \vec{p}}^+ a_{n_3, \ell_3, \vec{p} - \vec{q} - \vec{q}_1} b_{-\vec{q}} (b_{-\vec{q}_1} + b_{\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2}$$

$$- I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n, \ell, \vec{p}}^+ a_{n_3, \ell_3, \vec{p} - \vec{q} - \vec{q}_1} b_{\vec{q}} (b_{\vec{q}_1} + b_{-\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2}]$$

$$\times \exp[-i(\varepsilon_{n', \ell', \vec{p} - \vec{q}} - \varepsilon_{n, \ell, \vec{p}} - \omega_{-\vec{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \vec{p} \cdot \vec{A}(t_1) dt_1] dt_2$$

$$- \int_{-\infty}^t [I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n_3, \ell_3, \vec{p} + \vec{q} + \vec{q}_1}^+ a_{n, \ell, \vec{p}} (b_{\vec{q}_1} + b_{-\vec{q}_1}^+) b_{\vec{q}} \rangle_{t_2}$$

$$- I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n', \ell', \vec{p} + \vec{q}}^+ a_{n_3, \ell_3, \vec{p} - \vec{q}_1} b_{\vec{q}} (b_{\vec{q}_1} + b_{-\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2}]$$

$$\times \exp[i(\varepsilon_{n', \ell', \vec{p} + \vec{q}} - \varepsilon_{n, \ell, \vec{p}} - \omega_{\vec{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \vec{p} \cdot \vec{A}(t_1) dt_1] dt_2$$

$$- \int_{-\infty}^t [-I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n', \ell', \vec{p} + \vec{q}}^+ a_{n_3, \ell_3, \vec{p}} b_{-\vec{q}} (b_{-\vec{q}_1} + b_{\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2} +$$

$$+ I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\vec{q}_1) \langle a_{n_3, \ell_3, \vec{p} + \vec{q} - \vec{q}_1}^+ a_{n, \ell, \vec{p}} b_{\vec{q}} (b_{-\vec{q}_1} + b_{\vec{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \times$$

$$\times \exp[-i(\varepsilon_{n, \ell, \vec{p}} - \varepsilon_{n', \ell', \vec{p} + \vec{q}} - \omega_{-\vec{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \vec{p} \cdot \vec{A}(t_1) dt_1] dt_2 \quad (3.16)$$

Thực hiện một số phép chuyển đổi ta có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{k}}(t)}{\partial t} = & \sum_{n',\ell',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n'}(\bar{q})|^2 \int_{-\infty}^t dt_2 \exp\left[-\frac{ie}{mc} \int_{-\infty}^t \vec{p} \cdot \vec{A}(t_1) dt_1\right] \times \\ & \{ [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t_2) N_{\bar{q}} - n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1)] \exp[i(\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \varepsilon_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}} - \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \\ & + [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2) N_{\bar{q}}] \exp[i(\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \varepsilon_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}} + \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \\ & \exp[i(\varepsilon_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \\ & + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t_2) N_{\bar{q}}] \exp[i(\varepsilon_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} + \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sử dụng biểu thức của thế vectơ $\vec{A}(t)$ và công thức chuyển đổi hàm Bessel

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(z) \exp\{is\varphi\} \quad (3.18)$$

ta thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử trong dây lượng tử:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{k}}(t)}{\partial t} = & \sum_{n',\ell',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n'}(\bar{q})|^2 \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\vec{E}_0\vec{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\vec{E}_0\vec{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\ & \times \exp\{-i(k-s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{ [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t') N_{\bar{q}} - n_{n,\ell,\bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\ & \times \exp[i(\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \varepsilon_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}} - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n,\ell,\bar{p}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\ & \times \exp[i(\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \varepsilon_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}} + \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t') N_{\bar{q}} - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\ & \times \exp[i(\varepsilon_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\ & \times \exp[i(\varepsilon_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} + \omega_{\bar{q}})(t - t')] \} dt' \end{aligned} \quad (3.19)$$

trong đó $J_k(x)$ là hàm Bessel, m là khối lượng hiệu dụng của điện tử, $N_{\bar{q}}$ là hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của phonon, và δ là đại lượng vô cùng bé xuất hiện do giả thiết đoạn nhiệt khi có sự tương tác với sóng điện từ. Lưu ý rằng trong biểu thức (3.19) chúng ta đã thay t_2 bằng t' .

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài, chúng ta thực hiện tính toán tương tự như trường hợp vắng mặt từ trường ngoài, để thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử, chúng ta bắt đầu từ phương trình động lượng tử cho toán tử số hạt điện tử trong dây lượng tử khi có mặt của từ trường $n_{\gamma, \bar{p}}(t) = \langle a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma, \bar{p}} \rangle_t$, ta có:

$$i \frac{\partial n_{\gamma, \bar{p}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma, \bar{p}}, H] \rangle_t \quad (3.20)$$

Sử dụng Hamiltonian (3.9) và các phép biến đổi toán tử ta được:

$$i \frac{\partial n_{\gamma, \bar{p}}(t)}{\partial t} = \sum_{\gamma, \bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q}) J_{N, N'}(u) [F_{\gamma, \bar{p}, \gamma, \bar{p}-\bar{q}, \bar{q}}(t) + F_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}, \gamma, \bar{p}, -\bar{q}}^*(t) - F_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}, \gamma, \bar{p}, \bar{q}}(t) - F_{\gamma, \bar{p}, \gamma, \bar{p}+\bar{q}, -\bar{q}}^*(t)] \quad (3.21)$$

trong đó

$$F_{\gamma_1, \bar{p}_1, \gamma_2, \bar{p}_2, \bar{q}}(t) = \langle a_{\gamma_1, \bar{p}_1}^+ a_{\gamma_2, \bar{p}_2} b_{\bar{q}} \rangle_t = F(t)$$

Để tìm $F(t)$ ta xây dựng phương trình động cho $F(t)$ như sau:

$$i \frac{\partial F(t)}{\partial t} = i \frac{\partial F_{\gamma_1, \bar{p}_1, \gamma_2, \bar{p}_2, \bar{q}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{\gamma_1, \bar{p}_1}^+ a_{\gamma_2, \bar{p}_2} b_{\bar{q}}, H] \rangle_t \quad (3.22)$$

Một cách tương tự chúng ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t)}{\partial t} = & i[\varepsilon_{\gamma_1}^H(\bar{p}_1 - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) - \varepsilon_{\gamma_2}^H(\bar{p}_2 - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) - \omega_{\bar{q}}] F(t) \\ & + i \sum_{\gamma_3, \bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} J_{N, N'}(u) [I_{n_1, \ell_1, n_3, \ell_3}(\bar{q}) \langle a_{\gamma_3, \bar{p}_1+\bar{q}_1}^+ a_{\gamma_2, \bar{p}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_t - \\ & I_{n_1, \ell_2, n_1, \ell_3}(\bar{q}) \langle a_{\gamma_1, \bar{p}_1}^+ a_{\gamma_3, \bar{p}_2-\bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_t] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Giải phương trình vi phân trên theo phương pháp biến phân ta thu được:

$$F(t) = i \sum_{\gamma_3, \bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \int_{-\infty}^t J_{N, N'}(u) [I_{n_1, \ell_1, n_3, \ell_3}(\bar{q}) \langle a_{\gamma_3, \bar{p}_1+\bar{q}_1}^+ a_{\gamma_2, \bar{p}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_{t_2} +$$

$$\begin{aligned}
& -I_{n_1, \ell_2, n_1, \ell_3}(\bar{q}) \langle a_{\gamma_1, \bar{p}_1, \gamma_3, \bar{p}_2 - \bar{q}_1}^+ b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \times \\
& \exp\{i[\varepsilon_{\gamma_1}^H(\bar{p}_1) - \varepsilon_{\gamma_2}^H(\bar{p}_2) - \omega_{\bar{q}}](t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{-\infty}^t (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1\} dt_2
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Thay vào (3.21) ta thu được:

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial n_{\gamma, \bar{p}}(t)}{\partial t} = \sum_{\gamma, \bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q}) J_{N, N'}(u) \sum_{\gamma_3, \bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \times \\
& \times \{ \int_{-\infty}^t [I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\bar{q}) J_{N, N_3}(u) \langle a_{\gamma_3, \bar{p} + \bar{q}_1}^+ a_{\gamma, \bar{p} - \bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_{t_2} \\
& - I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\bar{q}_1) J_{N', N_3}(u) \langle a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma_3, \bar{p} - \bar{q} - \bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \\
& \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p} - \bar{q}} - \omega_{\bar{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \bar{p} \cdot \bar{A}(t_1) dt_1] dt_2 + \\
& + \int_{-\infty}^t [-I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\bar{q}_1) J_{N, N_3}(u) \langle a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma_3, \bar{p} - \bar{q} - \bar{q}_1} b_{-\bar{q}}^+ (b_{-\bar{q}_1} + b_{\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2} \\
& - I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\bar{q}_1) J_{N', N_3}(u) \langle a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma_3, \bar{p} - \bar{q} - \bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \\
& \times \exp[-i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p} - \bar{q}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \omega_{-\bar{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \bar{p} \cdot \bar{A}(t_1) dt_1] dt_2 + \\
& - \int_{-\infty}^t [I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\bar{q} - 1) J_{N', N_3}(u) \langle a_{\gamma_3, \bar{p} + \bar{q} + \bar{q}_1}^+ a_{\gamma, \bar{p}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_{t_2} \\
& - I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\bar{q}_1) J_{N, N_3}(u) \langle a_{\gamma, \bar{p} + \bar{q}}^+ a_{\gamma_3, \bar{p} - \bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \\
& \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p} + \bar{q}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \omega_{\bar{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \bar{p} \cdot \bar{A}(t_1) dt_1] dt_2 + \\
& - \int_{-\infty}^t [-I_{n, \ell, n_3, \ell_3}(\bar{q}_1) J_{N, N_3}(u) \langle a_{\gamma, \bar{p} + \bar{q}}^+ a_{\gamma_3, \bar{p}} b_{-\bar{q}}^+ (b_{-\bar{q}_1} + b_{\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2} \\
& + I_{n', \ell', n_3, \ell_3}(\bar{q}_1) J_{N', N_3}(u) \langle a_{\gamma_3, \bar{p} + \bar{q} - \bar{q}_1}^+ a_{\gamma, \bar{p}} b_{\bar{q}} (b_{-\bar{q}_1} + b_{\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \\
& \times \exp[-i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p} + \bar{q}} - \omega_{-\bar{q}})(t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{t_2}^t \bar{p} \cdot \bar{A}(t_1) dt_1] dt_2 \}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Thực hiện một số phép chuyển đổi ta có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{\gamma, \bar{k}}(t)}{\partial t} = & \sum_{\gamma, \bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \times \\
 & \times \int_{-\infty}^t dt_2 \exp\left[-\frac{ie}{mc} \int_{-\infty}^t \bar{p} \bar{A}(t_1) dt_1\right] \times \\
 & \times \{ [n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t_2) N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1)] \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}} - \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}}(t_2) N_{\bar{q}}] \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}} + \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}}(t_2) N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1)] \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}}(t_2) (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t_2) N_{\bar{q}}] \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}} + \omega_{\bar{q}})(t - t_2)] \}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Sử dụng biểu thức của thế vectơ $\bar{A}(t)$ và công thức chuyển đổi hàm Bessel (3.18), thay $t_2 = t'$ ta thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{\gamma, \bar{k}}(t)}{\partial t} = & \sum_{\gamma, \bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k, s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\
 & \times \exp\{-i(k-s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{ [n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t') N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
 & \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}}^H - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}^H - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\
 & \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}}^H - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}^H + \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{\gamma, \bar{p}}(t') N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
 & \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}^H - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}}^H - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{\gamma, \bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\
 & \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}^H - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}}^H + \omega_{\bar{q}})(t - t')] \} dt'
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Như vậy, chúng ta thấy rằng, khi có mặt của từ trường ngoài, phương trình động lượng tử của điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn xuất hiện thêm các yếu tố mới đặc trưng cho sự tương tác của từ trường lên điện tử trong dây lượng tử.

3.1.3. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn

Trường hợp vắng mặt từ trường ngoài, để thu được biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử trong trường hợp không có từ trường ngoài, hàm phân bố điện tử trong dây lượng tử cần thiết thu được từ việc giải phương trình động lượng tử. Tuy nhiên giải chính xác phương trình này là việc rất khó khăn, để đơn giản, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ gần đúng như sau:

$$n_{n,\ell,\bar{p}}(t') \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}, \quad n_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}, \quad n_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}},$$

ở đây $\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}$ là hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của điện tử. Đây là phương pháp đã được sử dụng có hiệu quả cho bài toán tương tự trong bán dẫn khối [60]. Hàm phân bố không cân bằng thu được từ việc giải gần đúng xấp xỉ phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử:

$$\begin{aligned} n_{n,\ell,\bar{p}}(t) = & - \sum_{\bar{q}, n, \ell} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n,\ell}(\bar{q})|^2 \sum_{k,j=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_{k+l}\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \frac{1}{l\Omega} e^{-il\Omega t} \\ & \times \left\{ - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1)}{\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}} + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1)}{\varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}} - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Mật độ dòng hạt tải được áp dụng cho mô hình dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn:

$$\bar{j}(t) = \frac{e}{m} \sum_{n,\ell,\bar{p}} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t) \right) n_{n,\ell,\bar{p}}(t) \quad (3.29)$$

$n_{n,\ell,\bar{p}}(t)$ được xác định ở (3.28) với phổ năng lượng của điện tử và thừa số hạng trong dây hình trụ hố thế cao vô hạn theo (1.41), (3.7) và (3.8).

Sử dụng biểu thức của hàm phân bố điện tử không cân bằng (3.28) với lưu ý rằng:

$$\sum_{n,l,\bar{p}} n_{n,l,\bar{p}} = n_0, \quad (3.30)$$

thực hiện các bước chuyển đổi cần thiết chúng ta thu được biểu thức của mật độ dòng hạt tải trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn:

$$\bar{j}(t) = -\frac{e^2}{mc} n_0 \bar{E}_0 \cos \Omega t + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{j}_l \sin(l\Omega t) \quad (3.31)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{j}_l = & 2\pi \frac{e}{m} \frac{1}{l\Omega} \sum_{n,l,n',\ell} \sum_{\bar{p},\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,l,n',\ell}(\bar{q})|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{q} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\ & \times [J_{k+l}\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) + J_{k-l}\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right)] \times N_{\bar{q}} (\bar{n}_{n,l,\bar{p}} - \bar{n}_{n',\ell,\bar{p}+\bar{q}}) \times \\ & \times \{ \delta(\varepsilon_{n',\ell,\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,l,\bar{p}} + \omega_{\bar{q}} - k\Omega) + [\omega_{\bar{q}} \rightarrow -\omega_{\bar{q}}] \}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Lưu ý rằng, để thu được biểu thức (3.32) chúng ta đã sử dụng phép gần đúng $N_{\bar{q}} + 1 \simeq N_{\bar{q}}$ với lý do $N_{\bar{q}} \gg 1$. Trong (3.32), số hạng thứ hai trong dấu $\{$ với ký hiệu $[\omega_{\bar{q}} \rightarrow -\omega_{\bar{q}}]$ được hiểu là số hạng như số hạng thứ nhất nhưng thay $\omega_{\bar{q}} \rightarrow -\omega_{\bar{q}}$.

Từ biểu thức của mật độ dòng hạt tải thu được, chúng ta tính toán hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn theo biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tổng quát (1.51). Đặt biểu thức mật độ dòng hạt tải vào (1.51) ta có:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \langle \bar{j}(t) \bar{E}_0 \sin \Omega t \rangle_t = \\ = & \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left\{ \left\langle -\frac{e^2 n_0 E_0^2}{m\Omega} \sin \Omega t \cos \Omega t \right\rangle + \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} \bar{j}_l \bar{E}_0 \sin \Omega t \sin l\Omega t \right\rangle_t \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sử dụng các tính chất của hàm Bessel và lưu ý các tích phân:

$$\int_0^T \cos \Omega t \sin \Omega t dt = 0$$

$$\int_0^T \sin \Omega t \sin l \Omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{khí } l > 1 \\ 1/2 & \text{khí } l = 1 \end{cases}$$

Biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn cho cả hai trường hợp tán xạ điện tử - phonon thu được:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \Omega}{c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \sum_{n, l, n', l'} |I_{n, l, n', l'}(\vec{q})|^2 \sum_{\vec{q}, \vec{p}} |C_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{n}_{n, l, \vec{p}} - \bar{n}_{n', l', \vec{p}+\vec{q}}] \times \\ \times k J_k^2\left(\frac{e E_0 \vec{q}}{m \Omega^2}\right) \{ \delta(\varepsilon_{n', l', \vec{p}+\vec{q}} - \varepsilon_{n, l, \vec{p}} + \omega_{\vec{q}} - k \Omega) + [\omega_{\vec{q}} \rightarrow -\omega_{\vec{q}}] \}, \quad (3.34)$$

trong đó $\delta(x)$ là hàm Delta-Dirac

a) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang

Trong trường hợp này, $\omega_{\vec{q}} \equiv \omega_0$ là tần số của phonon quang. Hệ số tương tác điện tử-phonon quang được cho bởi [40]

$$|C_{\vec{q}}|^2 \equiv |C_{\vec{q}}^{op}|^2 = \frac{e^2 \omega_0}{2 \varepsilon_0 q^2 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \quad (3.35)$$

trong đó ε_0 là hằng số điện môi, χ_∞ và χ_0 lần lượt là độ thấm điện môi cao tần và độ thấm điện môi tĩnh, V là thể tích chuẩn hóa. Biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến (3.34) được viết lại cho trường hợp tán xạ điện tử phonon quang:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 e^2 \Omega k_b T}{2 V \varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, l, n', l', \vec{q}, \vec{p}} |I_{n, l, n', l'}(\vec{q})|^2 [\bar{n}_{n, l, \vec{p}} - \bar{n}_{n', l', \vec{p}+\vec{q}}] \times \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2} k J_k^2\left(\frac{e E_0 \vec{q}}{m \Omega^2}\right) \{ \delta(\varepsilon_{n', l', \vec{p}+\vec{q}} - \varepsilon_{n, l, \vec{p}} + \omega_0 - k \Omega) + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \}, \quad (3.36)$$

Tương tự như bài toán trong bán dẫn khối, trong cuốn sách này chúng ta xem xét sự hấp thụ cho hai trường hợp giới hạn, hấp thụ gần ngưỡng và xa ngưỡng với các gần đúng tương ứng

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Để có được sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ ở gần ngưỡng, điều kiện $|k\Omega - \omega_0| \ll \bar{E}$ phải được thỏa mãn. Với điều kiện này biểu thức trong hàm Delta-Dirac δ không thể bỏ qua sự có mặt của vectơ sóng $\bar{p}$ của điện tử. Để thuận tiện cho việc tính toán giải tích, trong biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến (3.36) chúng ta đặt:

$$A_1 = \sum_{\bar{p}} \left[\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}_2} - \bar{n}_{n',\ell,\bar{p}_2+\bar{q}} \right] \delta(\varepsilon_{n',\ell,\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} + \omega_0 - k\Omega) \quad (3.37)$$

Biểu thức bên trong hàm Delta-Dirac được viết lại

$$\varepsilon_{n',\ell,\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} + \omega_0 - \Omega = \frac{\bar{q}^2}{2m} + \frac{\bar{q}}{m} \bar{p} + \varepsilon_{n',\ell} - \varepsilon_{n,\ell} + \omega_0 - \Omega \quad (3.38)$$

Đặt

$$A_2 = \frac{q^2}{2m} + (\varepsilon_{n',\ell} - \varepsilon_{n,\ell}) + \omega_0 - \Omega \quad (3.39)$$

ta viết lại biểu thức A_1

$$A_1 = \sum_{\bar{p}} \left[\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}_2} - \bar{n}_{n',\ell,\bar{p}_2+\bar{q}} \right] \delta\left(A_2 + \frac{\bar{q}}{m} \bar{p}\right) \quad (3.40)$$

Thực hiện chuyển tổng thành tích phân

$$\sum_{\bar{p}} (\dots) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dp (\dots), \quad (3.41)$$

và sử dụng công thức tính tích phân:

$$\int_0^\infty f(x) \delta[\phi(x)] dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|\phi'(x_i)|}; \quad \phi(x_i) = 0, \quad (3.42)$$

chúng ta thu được biểu thức cho A_1 :

$$A_1 = \frac{mn_0^*}{2\pi q} \exp\left[\frac{-mA_2^2}{2k_b T q^2}\right] \left\{ \exp\left(\frac{-\varepsilon_{n,\ell}}{k_b T}\right) - \exp\left[\frac{-1}{k_b T} \left(\frac{q^2}{2m} + \varepsilon_{n,\ell} - A_2\right)\right] \right\} \quad (3.43)$$

Lưu ý rằng để thu được biểu thức (3.43) chúng ta đã sử dụng hàm phân bố điện tử không suy biến [2] :

$$\bar{n}_{n,\ell,\vec{p}+\vec{q}} = n_0^* \exp\left(-\frac{\varepsilon_{n,\ell,\vec{p}+\vec{q}}}{k_b T}\right), \text{ với } n_0^* = \frac{n_0 (e\pi)^{\frac{3}{2}}}{V (m_0 k_b T)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.44)$$

trong đó V là thể tích chuẩn hóa, n_0 là mật độ điện tử trong dây lượng tử, m_0 là khối lượng của electron, và k_b là hằng số Boltzmann.

Thay (3.43) vào biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến (3.36) và khai triển hàm Bessel trong giới hạn gần đúng bậc hai:

$$\sum_k k J_k^2\left(\frac{e\bar{E}_0 q}{m\Omega^2}\right) = \left(\frac{e\bar{E}_0 q}{2m\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}_0 q}{2m\Omega^2}\right)^4, \quad (3.45)$$

ta thu được:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{8\pi^2 mn_0^* \Omega e^2 k_b T}{\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} V E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0}\right) \sum_{n,\ell,n',\ell'} \sum_q |I_{n,\ell,n',\ell'}(\vec{q})|^2 \frac{1}{q^3} \\ &\times \exp\left(\frac{-\varepsilon_{n,\ell}}{k_b T}\right) \left\{ \left[\exp\left(\frac{-mA_2^2}{2k_b T q^2}\right) \left[\left(\frac{e\bar{E}_0 \vec{q}}{2m\Omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e\bar{E}_0 \vec{q}}{2m\Omega^2}\right)^4 \right] \right. \right. \\ &\times \left. \left[1 - \exp\left(\frac{1}{k_b T} (\omega_0 - \Omega)\right) \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Chuyển tổng thành tích phân theo công thức sau:

$$\sum_q (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty q dq, \quad (3.47)$$

và sử dụng công thức tích phân:

$$\int_0^\infty (1+ax^2) \exp\left(-\frac{b}{x^2} - cx^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\exp(-2\sqrt{bc})}{c^{\frac{3}{2}}} (2c + 2a\sqrt{bc} + a)$$

chúng ta thu được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp hấp thụ gần ngưỡng

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi} e^4 n_0^* (k_b T)^{3/2}}{4c \epsilon_0 \sqrt{m \chi_\infty} \Omega^3 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 \{ [\exp\{\frac{1}{k_b T} B_1\} \times \\ \times \exp\{\frac{1}{k_b T} (\omega_o - \Omega)\} - 1] [1 + \frac{3e^2 E_0^2 k_b T}{8m\Omega^4} (1 + \frac{B_1}{2k_b T})] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \},$$

(3.48)

ở đây $B_1 = (B_{n, \ell}^2 - B_{n', \ell'}^2) / 2mR^2 + \omega_o - \Omega$.

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trong trường hợp này, hấp thụ phi tuyến sóng điện từ xảy ra khi điều kiện $|k\Omega - \omega_o| \gg \bar{\epsilon}$ được thỏa mãn, ở đây $\bar{\epsilon}$ là năng lượng trung bình của một điện tử. Khai triển hàm Bessel trong giới hạn gần đúng bậc hai theo (3.45), sử dụng công thức chuyển tổng thành tích phân (3.47) và hàm phân bố điện tử điện tử không suy biến, biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ được viết lại:

$$\alpha = \frac{4\pi n_0 \Omega e^2 k_b T}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} V E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \frac{1}{q} dq \\ \times \left[\left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}}{2m\Omega^2} \right)^2 \cos^2 \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{e \bar{E}_0 \bar{q}}{2m\Omega^2} \right)^4 \cos^4 \phi \right] \{ 1 - \exp[-\frac{1}{k_b T} (\frac{q^2}{2m} + \epsilon_{n', \ell'})] \} \\ \times \{ [\delta(\frac{q^2}{2m} + \epsilon_{n', \ell'} - \epsilon_{n, \ell} + \omega_o - \Omega)] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \}$$

(3.49)

Chú ý đến các kết quả tích phân

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \phi d\phi = \frac{3}{8}$$

biểu thức (3.49) có thể viết lại như sau:

$$\alpha = \frac{\pi^2 e^4 n_0 k_b T}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} V \Omega^3 m^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 \int_0^\infty dq \left[q + \frac{3}{8} \frac{e^2 E_0^2 q^3}{4m^2 \Omega^4} \right]$$

$$\times \{1 - \exp[-\frac{1}{k_b T} (\frac{q^2}{2m} + \varepsilon_{n', \ell})]\} \{[\delta(\frac{q^2}{2m} + \varepsilon_{n', \ell} - \varepsilon_{n, \ell} + \omega_0 - \Omega)] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0]\} \quad (3.50)$$

Sử dụng công thức tích phân (3.42), biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử trong trường hợp hấp thụ xa ngưỡng thu được:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi^2 e^4 k_b T n_0}{c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 m \varepsilon_0 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \\ &\times \left\{ \left[\left[1 + \frac{3e^2 E_0^2}{16m\Omega^4} (\varepsilon_{n', \ell} - \varepsilon_{n, \ell} + \omega_0 - \Omega) \right] \right. \right. \\ &\left. \left. [1 - \exp[-\frac{-\varepsilon_{n, \ell} - \omega_0 + \Omega}{k_b T}]] \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

b) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm

Trong trường hợp này $\omega_{\vec{q}}$ là tần số của phonon âm, vì $\omega_{\vec{q}} \ll \Omega$ nên trong biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến (3.34) ta có thể bỏ qua số hạng $\omega_{\vec{q}}$. Hệ số tương tác điện tử - phonon âm được xác định theo [20]:

$$|C_{\vec{q}}|^2 \equiv |C_{\vec{q}}^{\text{ac}}|^2 = \xi^2 q / 2\rho v_s V \quad (3.52)$$

trong đó V , ρ , v_s , và ξ lần lượt là thể tích chuẩn hóa, mật độ tinh thể, vận tốc sóng âm và hằng số thể biến dạng. Biểu thức (3.34) được viết lại cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{8\pi^2 \Omega \xi^2 k_b T}{c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2 \rho v_s^2 V} \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}|^2 \sum_{\vec{q}, \vec{p}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{n}_{n, \ell, \vec{p}} - \bar{n}_{n', \ell', \vec{p}+\vec{q}}] \times \\ &\times k J_k^2 \left(\frac{e E_0 \vec{q}}{m \Omega^2} \right) \delta(\varepsilon_{n', \ell', \vec{p}+\vec{q}} - \varepsilon_{n, \ell, \vec{p}} - k\Omega) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Lưu ý rằng trong biểu thức (3.53) ta đã sử dụng biểu thức của hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của phonon âm $N_{\vec{q}} \simeq k_b T / v_s \vec{q}$. Chuyển tổng thành tích phân theo (3.47) và (3.41) và thực hiện các tính

toán tương tự như trường hợp tán xạ điện tử phonon quang và sử dụng công thức tích phân:

$$\int_0^{\infty} x^2 (1+ax^2) \exp\left(-\frac{b}{x^2} - cx^2\right) dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4c^{\frac{3}{2}}} \exp(-2\sqrt{bc}) \left\{ 1 + 2\sqrt{bc} \left[1 + \frac{a}{4c\sqrt{bc}} (4bc + 3\sqrt{bc} + 3) \right] \right\}, \quad (3.54)$$

ta thu được biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m\pi} e^2 n_0^* \xi^2 (k_b T)^{5/2}}{4c \sqrt{\chi_{\infty}} \rho v_s \Omega^3 V} \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(q)|^2 \frac{D_1}{2k_b T} \exp\left\{-\frac{1}{2k_b T} D_1\right\} \times$$

$$\times \left[1 - \exp\left\{-\frac{\Omega}{k_b T}\right\} \right] \left[1 + \frac{3e^2 E_0^2 (k_b T)^2}{4m\Omega^4 D_1} \left(\frac{D_1^2}{4(k_b T)^2} + \frac{3D_1}{4k_b T} + 3 \right) \right], \quad (3.55)$$

trong đó $D_1 = (B_{n, \ell}^2 - B_{n', \ell'}^2) / 2mR^2 - \Omega$.

Như vậy, bằng phương pháp phương trình động lượng tử cho điện tử, biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn đã thu được cho cả hai trường hợp tán xạ điện tử-phonon. Từ các biểu thức thu nhận được này ta có thể thấy rằng sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử phụ thuộc không tuyến tính vào các tham số của sóng điện từ như tần số, cường độ, vào nhiệt độ của hệ và bán kính của dây lượng tử. Sự phụ thuộc này sẽ được đánh giá và bàn luận trong phần tính số. Một giới hạn có thể nhận được từ biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ là khi hệ số phụ thuộc bậc hai của cường độ sóng điện tiến đến 0 thì kết quả hấp thụ phi tuyến này sẽ quay trở lại kết quả tuyến tính đã được nghiên cứu theo phương pháp Kubo-Mori mở rộng [20]. Khác với kết quả nghiên cứu của cùng bài toán đã được tính toán đối với bán dẫn khối, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử có mặt của tổng theo hai chỉ số lượng tử theo hai phương bị giới hạn của dây.

Khi có mặt từ trường ngoài, các tính toán tương tự như trường hợp không có từ trường, để thu được biểu thức của hàm phân bố điện tử khi có mặt của từ trường ngoài ta sử dụng phương pháp xấp xỉ gần đúng như sau:

$$n_{\gamma,\bar{p}}(t') \approx \bar{n}_{\gamma,\bar{p}}, \quad n_{\gamma,\bar{p}+\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{\gamma,\bar{p}+\bar{q}}, \quad n_{\gamma,\bar{p}-\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{\gamma,\bar{p}-\bar{q}}.$$

ở đây $\bar{n}_{\gamma,\bar{p}}$ là hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của điện tử. Hàm phân bố của điện tử trong dây lượng tử khi có mặt của từ trường thu được

$$\begin{aligned} n_{\gamma,\bar{p}}(t) = & - \sum_{\bar{q},\gamma'} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}|^2 \left| J_{N,N'}(u) \right|^2 \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} J_k \left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2} \right) J_{k+l} \left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2} \right) \frac{1}{l\Omega} \\ & \times e^{-il\Omega t} \left\{ \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{\gamma,\bar{p}}N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{\gamma,\bar{p}}^H - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}^H + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}N_{\bar{q}} - \bar{n}_{\gamma,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1)}{\varepsilon_{\gamma,\bar{p}}^H - \varepsilon_{\gamma',\bar{p}-\bar{q}}^H - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \right. \\ & \left. - \frac{\bar{n}_{\gamma,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{\gamma,\bar{p}+\bar{q}}N_{\bar{q}}}{\varepsilon_{\gamma',\bar{p}+\bar{q}}^H - \varepsilon_{\gamma,\bar{p}}^H + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} - \frac{\bar{n}_{\gamma,\bar{p}}N_{\bar{q}} - \bar{n}_{\gamma,\bar{p}+\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1)}{\varepsilon_{\gamma',\bar{p}+\bar{q}}^H - \varepsilon_{\gamma,\bar{p}}^H - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right\}, \quad (3.56) \end{aligned}$$

Mật độ dòng hạt tải được áp dụng cho mô hình dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài:

$$\bar{j}(t) = \frac{e}{m} \sum_{\gamma,\bar{p}} \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t) \right) n_{\gamma,\bar{p}}(t) \quad (3.57)$$

với $n_{\gamma,\bar{p}}(t)$ được xác định ở (3.56). Sử dụng biểu thức của hàm phân bố điện tử không cân bằng (3.56) với các bước biến đổi cần thiết chúng ta thu được biểu thức của mật độ dòng hạt tải trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn:

$$\bar{j}(t) = -\frac{e^2}{mc} n_0 \bar{E}_0 \cos \Omega t + \sum_{l=1}^{\infty} \bar{j}_l \sin(l\Omega t) \quad (3.58)$$

trong đó

$$\bar{j}_l = 2\pi \frac{e}{m} \frac{1}{l\Omega} \sum_{\gamma,\gamma'} \sum_{\bar{p},\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 \left| J_{N,N'}(u) \right|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{q} J_k \left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2} \right) \times$$

$$\times [J_{k+l}(\frac{e\vec{E}_0\vec{q}}{m\Omega^2}) + J_{k-l}(\frac{e\vec{E}_0\vec{q}}{m\Omega^2})] \times N_{\vec{q}}(\bar{n}_{\gamma,\vec{p}} - \bar{n}_{\gamma,\vec{p}+\vec{q}}) \times \\ \times \{\delta(\varepsilon_{\gamma,\vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma,\vec{p}}^H + \omega_{\vec{q}} - k\Omega) + [\omega_{\vec{q}} \rightarrow -\omega_{\vec{q}}]\}. \quad (3.59)$$

Đặt biểu thức mật độ dòng hạt tải vào biểu thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ (1.51).

$$\alpha = \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_{\infty}}E_0^2} \langle \vec{j}(t) \vec{E}_0 \sin\Omega t \rangle_t = \\ = \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_{\infty}}E_0^2} \left\{ \left\langle -\frac{e^2 n_0 E_0^2}{m\Omega} \sin\Omega t \cos\Omega t \right\rangle_t + \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} \vec{j}_l \vec{E}_0 \sin\Omega t \right\rangle_t \right\} \quad (3.60)$$

Thực hiện các tính toán, biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài:

$$\alpha = \frac{8\pi^2\Omega}{c\sqrt{\chi_{\infty}}E_0^2} \sum_{\gamma,\gamma'} |I_{n,l,n',l'}(\vec{q})|^2 |J_{N,N'}(u)|^2 \sum_{\vec{q},\vec{p}} |C_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k J_k^2(\frac{eE_0\vec{q}}{m\Omega^2}) \times \\ \times [\bar{n}_{\gamma,\vec{p}} - \bar{n}_{\gamma,\vec{p}+\vec{q}}] \{\delta(\varepsilon_{\gamma,\vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma,\vec{p}}^H + \omega_{\vec{q}} - k\Omega) + [\omega_{\vec{q}} \rightarrow -\omega_{\vec{q}}]\}, \quad (3.61)$$

Xét cho tán xạ điện tử-phonon quang' $\omega_{\vec{q}} \equiv \omega_o$, hệ số tương tác điện tử-phonon quang được cho bởi (3.35). Biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến được viết lại

$$\alpha = \frac{16\pi^3 e^2 \Omega k_b T}{V \varepsilon_0 c \sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_{\infty}} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma,\gamma',\vec{q},\vec{p}} |I_{n,l,n',l'}(\vec{q})|^2 |J_{N,N'}(u)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2} k \times \\ \times J_k^2(\frac{eE_0\vec{q}}{m\Omega^2}) [\bar{n}_{\gamma,\vec{p}} - \bar{n}_{\gamma,\vec{p}+\vec{q}}] \{\delta(\varepsilon_{\gamma,\vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma,\vec{p}}^H + \omega_o - k\Omega) + [\omega_o \rightarrow -\omega_o]\}, \quad (3.62)$$

Xét trường hợp điện tử không suy biến ta có:

$$\bar{n}_{\gamma,\vec{p}} = n_0^* \exp\left\{-\frac{\varepsilon_{\gamma,\vec{p}}^H}{k_B T}\right\} \quad (3.63)$$

Sử dụng công thức chuyển tổng thành tích phân:

$$\sum_{\vec{p}_\perp} (...) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}m\omega_c}^{\frac{1}{2}m\omega_c} dp_z = \frac{m\omega_c}{2\pi} \quad (3.64)$$

ta thu được:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{8\pi^2 e^2 \Omega k_B T n_0^* m \omega_c}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} V E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma'} \sum_{\vec{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \times \\ & \times k J_k^2 \left(\frac{e \bar{E}_0 \vec{q}}{2m\Omega^2} \right)^2 \left[\exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma^H}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon_{\gamma'}^H}{k_B T}\right) \right] \times \\ & \times \frac{1}{q^2} \{ [\delta(\epsilon_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^H - \epsilon_{\gamma, \vec{p}}^H + \omega_o - k\Omega)] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Hạn chế gần đúng bậc hai của hàm Bessel, thực hiện các biến đổi ta thu được:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{8\pi^2 e^2 \Omega k_B T n_0^* m \omega_c}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} V E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma'} \sum_{\vec{q}} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \times \\ & \times \left(\left(\frac{e \bar{E}_0}{2m\Omega^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{e \bar{E}_0}{2m\Omega^2} \right)^4 q^2 \right) \left[\exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma^H}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon_{\gamma'}^H}{k_B T}\right) \right] \times \\ & \times \frac{1}{q^2} \{ [\delta(\epsilon_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^H - \epsilon_{\gamma, \vec{p}}^H + \omega_o - k\Omega)] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Sử dụng công thức chuyển tổng thành tích phân:

$$\sum_{\vec{p}_\perp} (...) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dp_\perp q_\perp = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dq_\perp^2, \quad (3.67)$$

biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ (3.66) được tính toán và viết lại như sau:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 e^2 \Omega k_B T n_0^* m \omega_c}{c \sqrt{\chi_\infty} \epsilon_0 E_0^2 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \left(\frac{e \bar{E}_0}{2m\Omega^2} \right)^2 \sum_{\gamma, \gamma'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times [\exp(-\frac{\varepsilon_{\gamma}^H}{k_B T}) - \exp(-\frac{\varepsilon_{\gamma'}^H}{k_B T})] \{ [\delta(\varepsilon_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma, \vec{p}}^H + \omega_o - k\Omega)] + \\
& + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \} \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dq_{\perp}^2 |J_{N, N'}(u)|^2 (1 + \frac{1}{2} (\frac{e\bar{E}_0}{2m\Omega^2})^2 q^2) \\
& \quad \quad \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Xét tích phân:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dq^2 (\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{2m\Omega^2})^2 \frac{1}{q^2} |J_{N, N'}(u)|^2 = \\
&= (\frac{eE_0}{2m\Omega^2})^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_0^{\infty} |J_{NN'}(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2)|^2 \frac{2}{a_c^2} (\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) = \\
&= (\frac{eE_0}{2m\Omega^2})^2 \frac{2\pi}{a_c^2} \int_0^{\infty} |J_{NN'}(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2)|^2 (\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) d(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2). \\
& \quad \quad \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Sử dụng công thức:

$$\begin{aligned}
J_{NN'}(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) &= \int_0^{\infty} dr \phi_{N'}(\vec{r}_{\perp} - a_c^2 \vec{p}_{\perp} - a_c^2 \vec{q}_{\perp}) e^{i\vec{q}_{\perp} \cdot \vec{r}_{\perp}} \phi_N(\vec{r}_{\perp} - a_c^2 \vec{p}_{\perp}) = \\
&= 2^{\frac{|N'-N|}{2}} (\frac{N!}{N'!})^{\frac{Sgn(N'-N)}{2}} \times \exp(-\frac{i}{2} a_c^2 q_x q_y) \exp(-\frac{1}{4} a_c^2 q_{\perp}^2) \\
&\quad \times [Sgn(N'-N) a_c q_y + i a_c q_x] L_{\min(N', N)}^{|N'-N|} (\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) \\
& \quad \quad \quad (3.70)
\end{aligned}$$

trong đó

$$Sgn(N' - N) = \begin{cases} \frac{N' - N}{|N' - N|} & \text{khi } N \neq N' \\ 0 & \text{khi } N = N' \end{cases}$$

ta thu được:

$$\begin{aligned}
A &= (\frac{eE_0}{2m\Omega^2})^2 \frac{2\pi}{a_c^2} (\frac{N!}{N'!})^{Sgn(N'-N)} \int_0^{\infty} \exp\{-\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2\} (\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2)^{|N'-N|} \times \\
&\quad \times L_{\min(N', N)}^{|N'-N|} (\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) L_{\min(N', N)}^{|N'-N|} (\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) d(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2) \\
& \quad \quad \quad (3.71)
\end{aligned}$$

áp dụng tính trực giao của hàm Laguerre suy rộng:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^P L_a^P(x) L_b^P(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{khi } a \neq b \\ \frac{(a+P+1)}{a!} & \text{khi } a = b \end{cases} \quad (3.72)$$

Ta có:

$$A = \frac{2\pi}{a_c^2} \left(\frac{eE_0}{2m\Omega^2} \right)^2 \quad (3.73)$$

Tương tự ta có:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dq^2 \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{2m\Omega^2} \right)^4 \frac{1}{q^2} |J_{N,N'}(u)|^2 = \frac{3\pi}{a_c^4} \left(\frac{eE_0}{2m\Omega^2} \right)^4 \quad (3.74)$$

Thay (3.73) và (3.74) vào (3.68) ta có:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\pi e^4 n_0^* \omega_c K_B T}{2c \sqrt{\chi_\infty} \epsilon_0 m a_c^2 \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma'} \left(1 + \frac{3e^2}{8m^2 a_c^2 \Omega^4} E_0^2 \right) |I_{n, l, n', l'}(\bar{q})|^2 \times \\ & \times \left[\exp\left(-\frac{\epsilon_\gamma^H}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon_{\gamma'}^H}{k_B T}\right) \right] \{ [\delta(\epsilon_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}^H - \epsilon_{\gamma, \bar{p}}^H + \omega_o - k\Omega)] + \\ & + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \} \end{aligned} \quad (3.75)$$

Từ (3.75) ta sử dụng công thức [48]:

$$\delta(\epsilon_\gamma^H - \epsilon_{\gamma'}^H \pm \omega_o - \Omega) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{N, N'}}{(\epsilon_\gamma^H - \epsilon_{\gamma'}^H + \Omega \mp \omega_o)^2 + \gamma_{N, N'}^2}, \quad (3.76)$$

trong đó $\gamma_{N, N'}$ là nghịch đảo thời gian phục hồi, và là độ rộng của mức Landau tương ứng ta thu được biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài thu được như sau:

$$\alpha = \frac{e^4 n_0^* \omega_c k_B T}{2\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} m a_c^2 \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma'} |I_{n, l, n', l'}(\bar{q})|^2 \left[1 + \frac{3e^2 E_0^2}{8a_c^2 m^2 \Omega^4} \right] \times$$

$$\times \left[\exp\left\{\frac{-\omega_c}{k_b T} \left[N + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{|n|}{2}\right]\right\} - \exp\left\{\frac{-\omega_c}{k_b T} \left[N' + \frac{n'}{2} + \frac{1}{2} + \frac{|n'|}{2}\right]\right\} \right] \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\sqrt{A |M^*|}}{M^* (\Omega - \omega_o + M^* \omega_c)^2 + A} \right] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \right\}. \quad (3.77)$$

trong đó $M^* = M + (n - n')/2 + (\ell - \ell')/2$, $M = N - N'$, và

$$A = N_0 \frac{|C_0|^2}{4\pi^2} \sum_{\vec{q}} |I_{n,\ell,n'}(\vec{q})|^2 \text{ với } N_0 = k_b T / \omega_o.$$

Như vậy, bằng phương pháp phương trình động lượng tử, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm khi có mặt của từ trường ngoài đã được xác định (3.77). Từ biểu thức giải tích này chúng ta thấy rằng sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ khi có mặt của từ trường chịu ảnh hưởng của các yếu tố đặc trưng của từ trường ngoài như tần số cyclotron, chỉ số mức Landau. Để thấy rõ hơn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào các tham số của hệ, biểu thức (3.77) sẽ được tính số và bàn luận. Biểu thức (3.77) cũng cho thấy rằng nếu cho số hạng phụ thuộc bậc 2 vào cường độ điện trường E_0 tiến đến 0 thì kết quả phi tuyến trên sẽ trở về kết quả tuyến tính.

3.1.4. Kết quả tính số và thảo luận

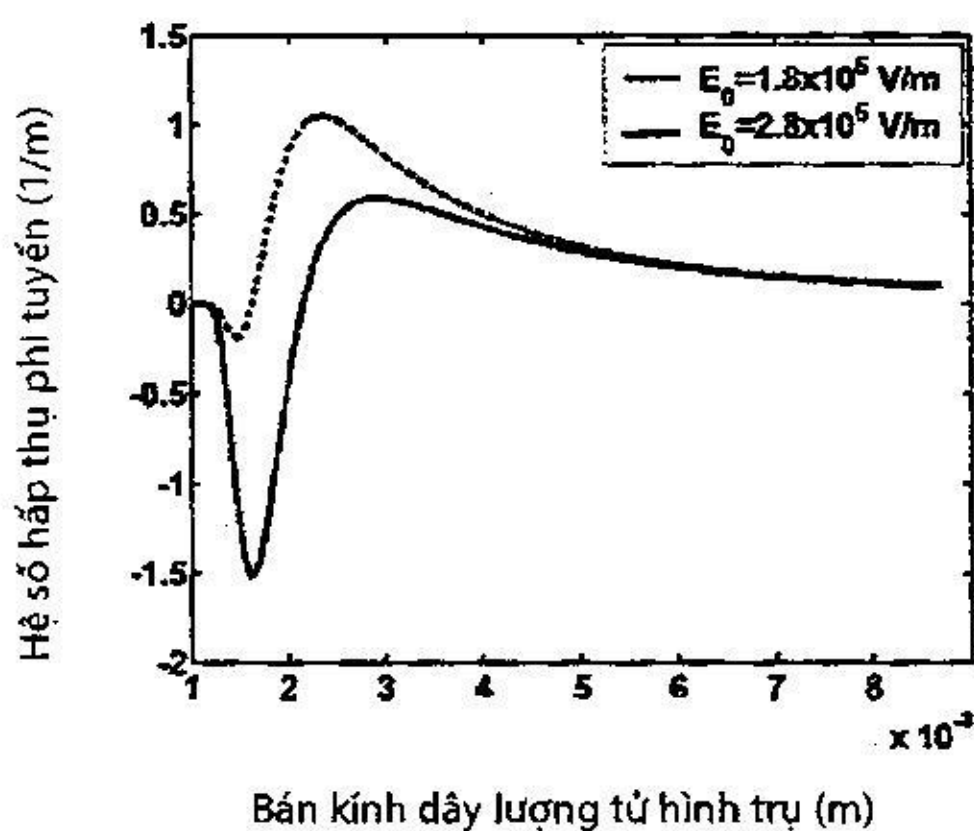
Để thấy được tường minh sự phụ thuộc về cả định tính lẫn định lượng của các hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn vào các tham số của hệ, trong phần tiếp theo sẽ trình bày các kết quả tính số có được bằng việc sử dụng phần mềm tính số Matlab. Dây lượng tử được chọn là $GaAs/GaAsAl$, đây là vật liệu thường được sử dụng nhiều trong tính số. Các số liệu được sử dụng tính số ở Bảng 3.1. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ được xem như là các hàm phụ thuộc độc lập vào các tham số như bán kính dây R , nhiệt độ T của hệ, tần số Ω và cường độ E_0 của sóng điện từ.

Bảng 3.1: Các thông số cơ bản của dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn

Tham số	Ký hiệu	Giá trị
Khối lượng hiệu dụng của electron	m_e	$6.006 \times 10^{-34} \text{ kg}$
Vận tốc sóng âm	v_s	5220 m/s
Mật độ tinh thể	ρ	$5.3 \times 10^3 \text{ kg / m}^3$
Hằng số biến dạng	ξ	$2.2 \times 10^{-18} \text{ J}$
Hằng số Boltzmann	k_b	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Hằng số điện môi	ϵ	12.5
Độ thấm điện môi cao tần	χ_∞	10.8
Độ thấm điện môi tĩnh	χ_0	13.1

Kết quả khảo sát hệ số hấp thụ trong trường hợp vắng mặt từ trường ngoài với từng cơ chế tán xạ khác nhau được trình bày sau đây:

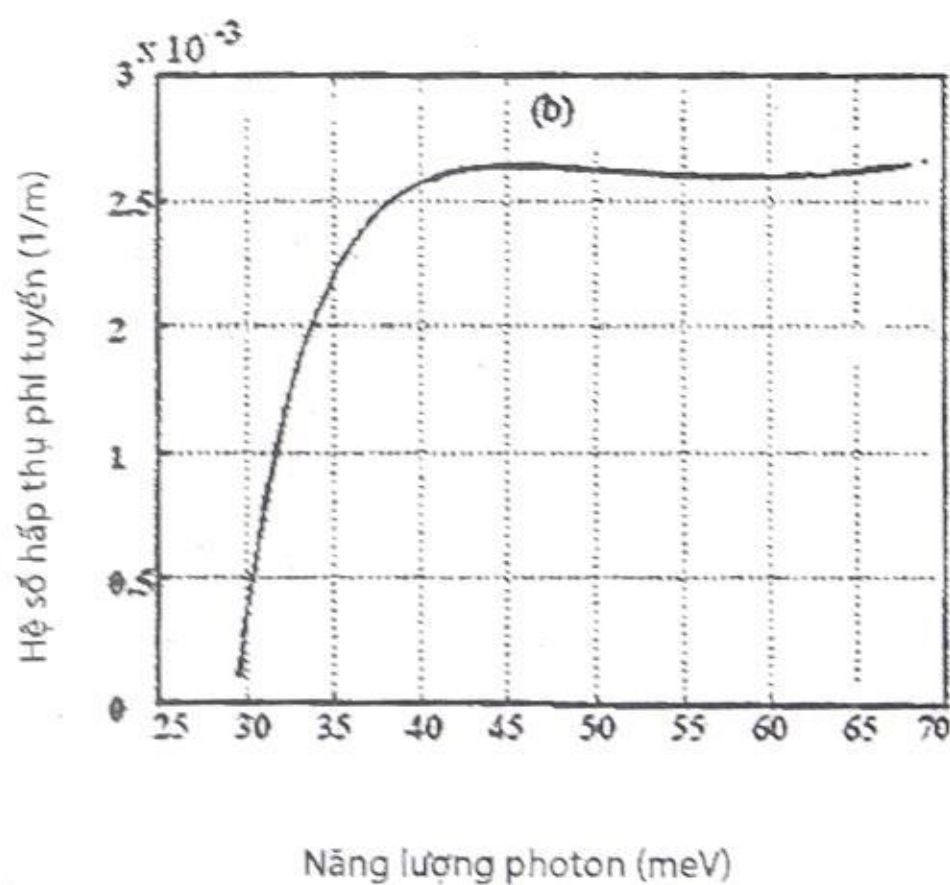
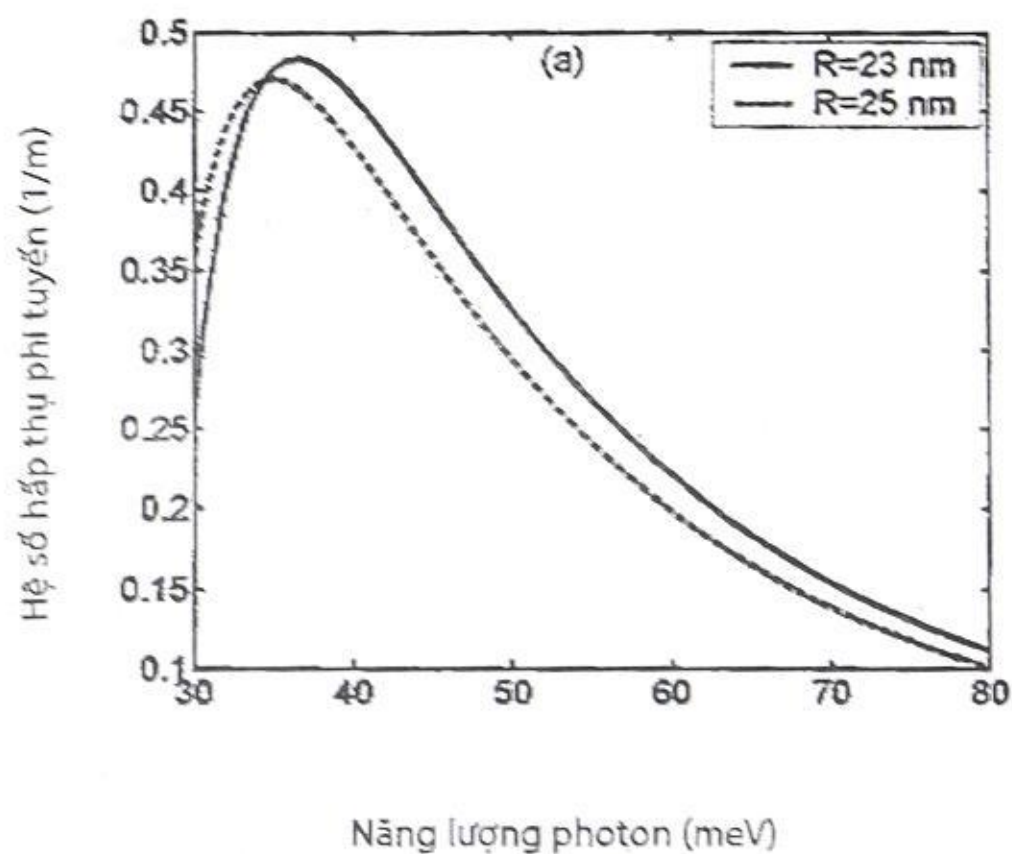
a) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm



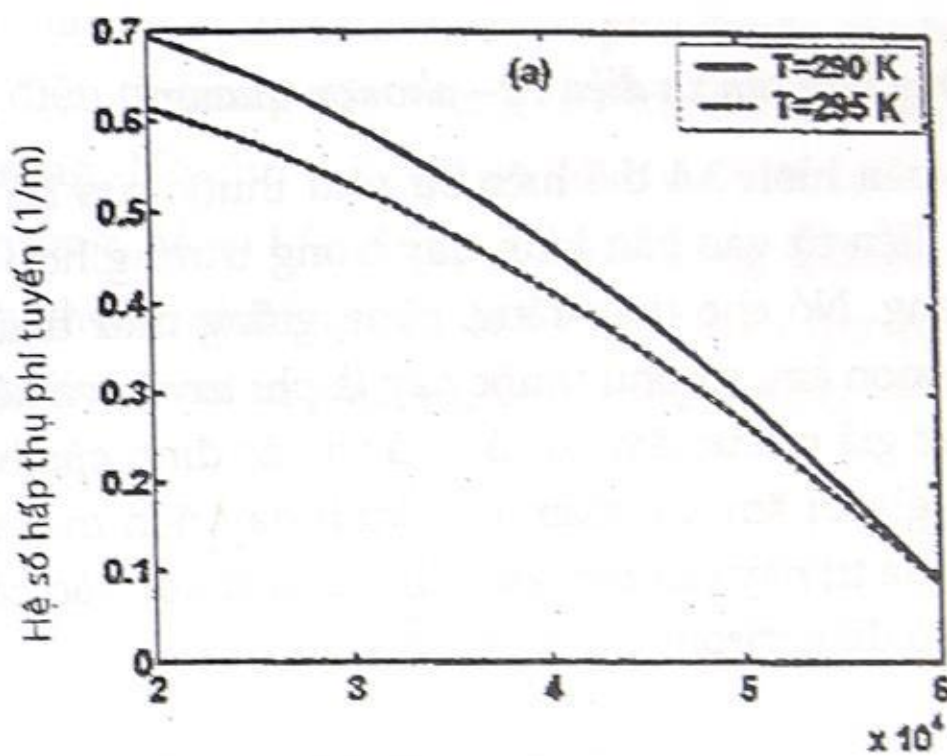
Hình 3.1: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử α vào bán kính dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn (tán xạ điện tử-phonon âm)

Đồ thị trên hình 3.1 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây tại các giá trị khác nhau của cường độ điện trường E_0 . Nó cho thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến phụ thuộc không tuyến tính vào bán kính dây. Giá trị của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tăng lên khi bán kính của dây lượng tử giảm xuống. Tuy nhiên đến một giá trị xác định của bán kính dây, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đạt giá trị cực đại rồi giảm dần khi bán kính dây tiếp tục giảm. Giá trị xác định của bán kính dây mà tại đó hệ số hấp thụ phi tuyến có được cực đại là khác nhau và phụ thuộc vào cường độ điện trường ngoài. Ví dụ, với $E_0 = 1,6 \times 10^6 V/m$ và $E_0 = 3,6 \times 10^6 V/m$, đỉnh hấp thụ xuất hiện tại các giá trị của bán kính dây $R \sim 23 nm$ và $R \sim 28 nm$. Một điều đáng chú ý nữa là hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử có thể có được giá trị âm, đồng nghĩa với việc nó có thể bức xạ sóng điện từ khi hội tụ các điều kiện phù hợp. Đây là một sự khác biệt rõ đối với bán dẫn khối [6064] cũng như hệ hai chiều như hố lượng tử [61], siêu mạng [46]. Tuy nhiên nó là phù hợp so với trường hợp hấp thụ tuyến tính đã được nghiên cứu trước đây bằng phương pháp Kubo-Mori [20].

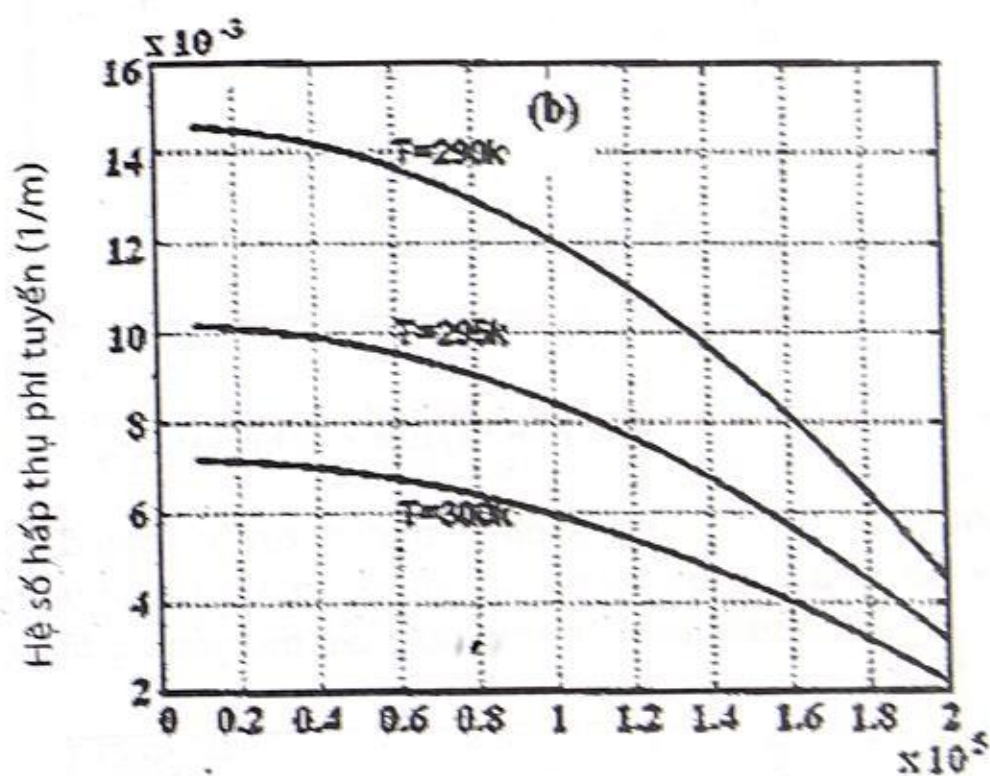
Đồ thị trên hình 3.2 thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn với các giá trị khác nhau của bán kính dây trong dây lượng tử (a) và trong hố lượng tử (b) [61]. Từ kết quả tính số này, chúng ta có thể thấy rằng đã có sự khác biệt giữa hệ một chiều và hệ hai chiều. Hệ số hấp thụ phi tuyến cho trường hợp tán xạ điện tử phonon âm trong dây lượng tử có đỉnh hấp thụ mà trong bán dẫn khối [60] và hố lượng tử [61] không được nhìn thấy. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn cũng lớn hơn nhiều so với trong bán dẫn khối và hố lượng tử.



Hình 3.2: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn (a), và trong hố lượng tử (b) [61]



Cường độ sóng điện từ E_0 (V/cm)



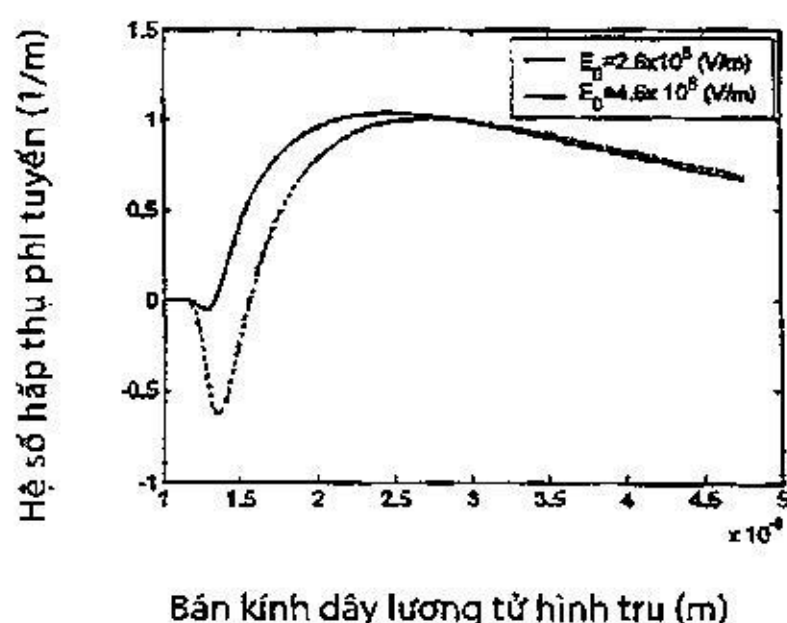
Cường độ sóng điện từ E_0 (V/cm)

Hình 3.3: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào cường độ sóng điện từ E_0 cho trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn (a) và trong hố lượng tử (b)

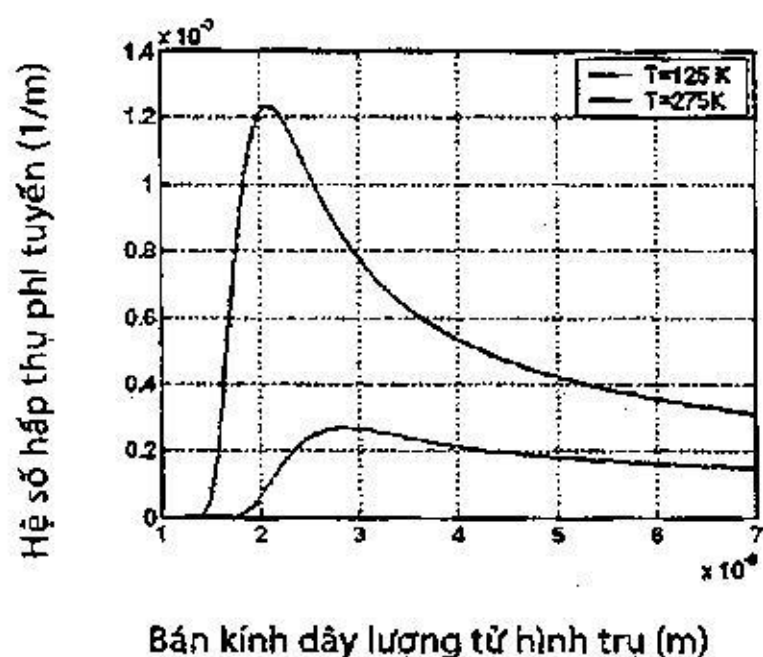
Đồ thị trên hình 3.3 cho thấy rằng, về mặt định tính, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào cường độ điện trường cho trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm trong dây lượng tử và trong hố lượng tử gần như giống nhau. Tuy nhiên về mặt định lượng, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử lớn hơn nhiều.

b) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang

Đồ thị trên hình 3.4 thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây trong trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang. Nó cho thấy rằng, cũng giống như trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm, sự phụ thuộc này là phi tuyến và hệ số hấp thụ phi tuyến đạt các giá trị cực đại tại các giá trị xác định của bán kính dây và có thể nhận giá trị âm khi giảm bán kính dây đến một giá trị xác định nào đó. Các giá trị này của bán kính dây phụ thuộc vào các tham số khác như cường độ điện trường, nhiệt độ của hệ,...

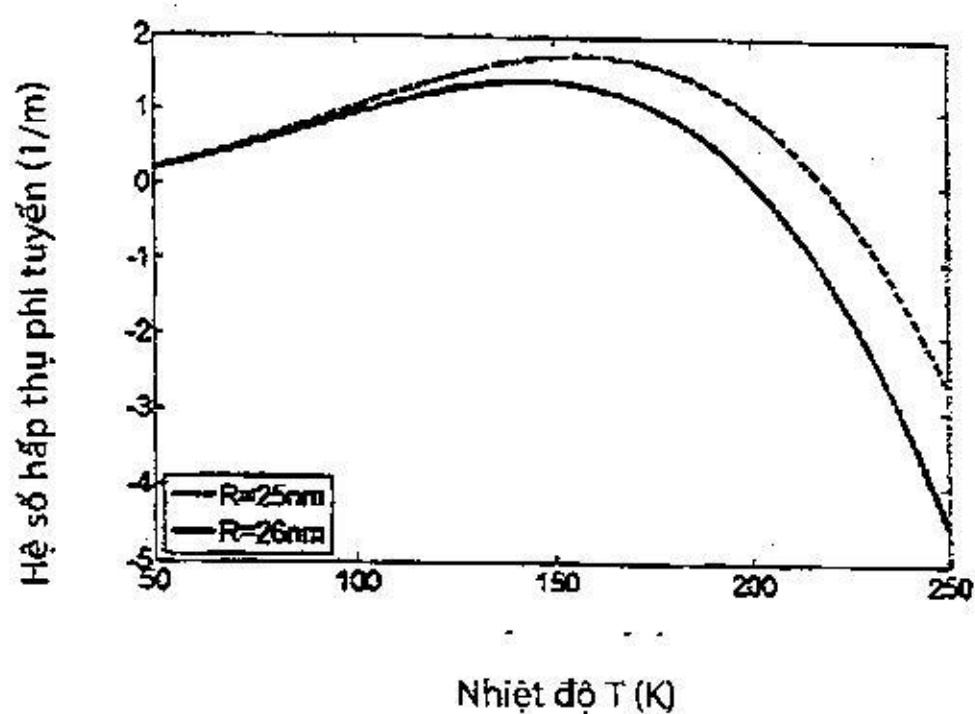


Hình 3.4: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào bán kính dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang (Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng)

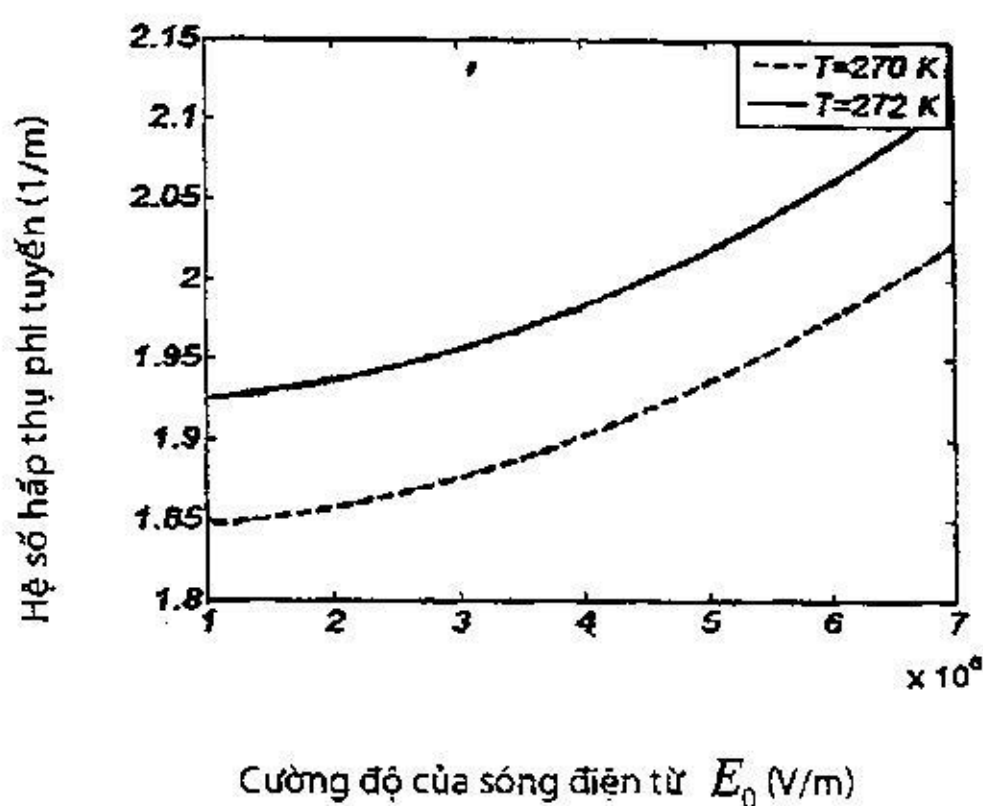


Hình 3.5: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào bán kính dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn cho trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang (hấp thụ xa ngưỡng)

Đồ thị trên hình 3.5 cũng thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ nhưng ở trường hợp hấp thụ xa ngưỡng. Nó cho thấy đã có sự khác biệt so với trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp xa ngưỡng không nhận giá trị âm. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp xa ngưỡng bé hơn rất nhiều, cỡ 10^3 lần so với hấp thụ gần ngưỡng.



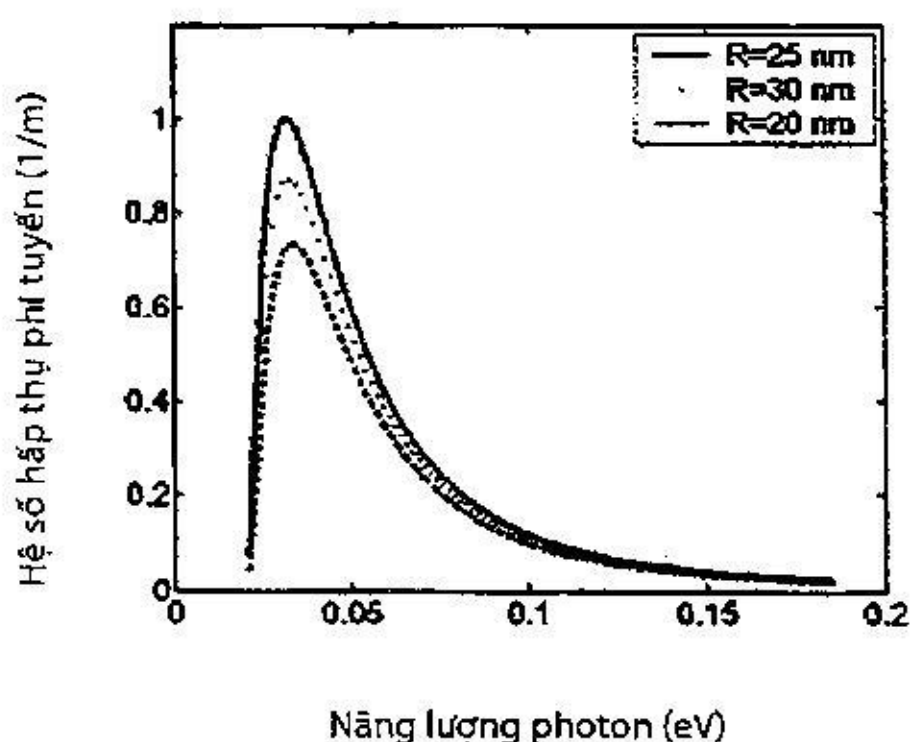
Hình 3.6: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn vào nhiệt độ T của hệ tại các giá trị khác nhau của bán kính dây.



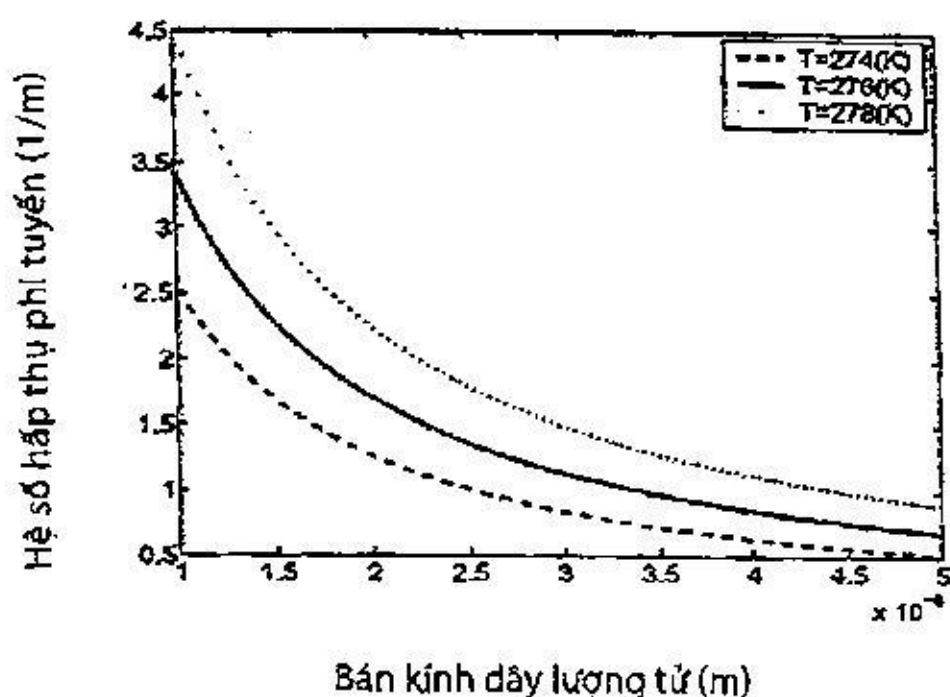
Hình 3.7: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào cường độ E_0 của sóng điện từ tại các giá trị khác nhau của nhiệt độ T

Đồ thị trên hình 3.6 cho thấy sự phụ thuộc mạnh và phi tuyến của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ T của hệ với các giá trị khác nhau của bán kính dây. Nó cũng cho thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn đạt giá trị cực đại tại các giá trị khác nhau của nhiệt độ, giá trị này phụ thuộc vào giá trị của bán kính dây. Ví dụ: tại $R = 26 \text{ nm}$ và $R = 25 \text{ nm}$, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ có được giá trị cực đại khi nhiệt độ lần lượt là $T \sim 145 \text{ K}$ và 160 K . Đây cũng là điểm khác biệt mà trong bán dẫn khối không có được. Hệ số hấp thụ phi tuyến tăng lên khi nhiệt độ tăng, tuy nhiên khi đạt được giá trị cực đại, hệ số hấp thụ lại giảm khi nhiệt độ của hệ tiếp tục tăng lên. Điều này có thể được giải thích dựa trên hiệu ứng giảm kích thước, khi nhiệt độ tăng, năng lượng chuyển động nhiệt của hạt dẫn cũng tăng lên, điều kiện để quan sát các hiệu ứng $E_{n+1} - E_n \gg k_b T$ dần bị vi phạm, dẫn đến sự ảnh hưởng của hiệu ứng giảm kích thước lên hệ số hấp thụ phi tuyến giảm đi.

Đồ thị trên hình 3.7 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào cường độ E_0 , sự phụ thuộc này là phi tuyến và khác so với trường hợp tán xạ điện tử phonon-âm, hệ số hấp thụ tăng khi tăng dần cường độ điện trường, hệ số hấp thụ trong trường hợp này cũng lớn hơn.



Hình 3.8: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào năng lượng photon $\hbar\Omega_B$ tại các giá trị khác nhau của bán kính dây



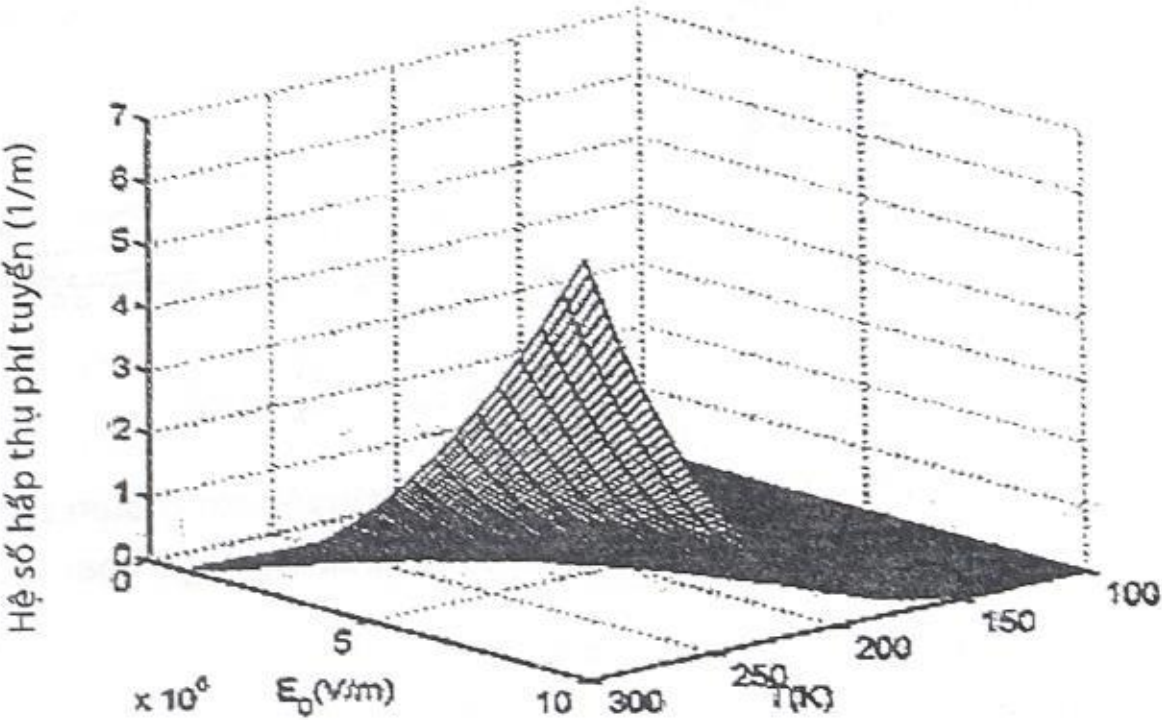
Hình 3.9: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào bán kính dây lượng tử khi có mặt của từ trường ngoài

Đồ thị trên hình 3.8 cho thấy rằng, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đạt giá trị cực đại (đỉnh hấp thụ) khi tần số sóng điện từ trùng với tần số của phonon quang, $\Omega = \omega_0$. Sự thay đổi của bán kính dây không làm thay đổi giá trị của tần số sóng điện từ mà tại đó hệ số hấp thụ đạt giá trị cực đại. Điều này cũng giống như trong bán dẫn khối và hệ hai chiều, tuy nhiên hệ số hấp thụ phi tuyến trong dây là lớn hơn.

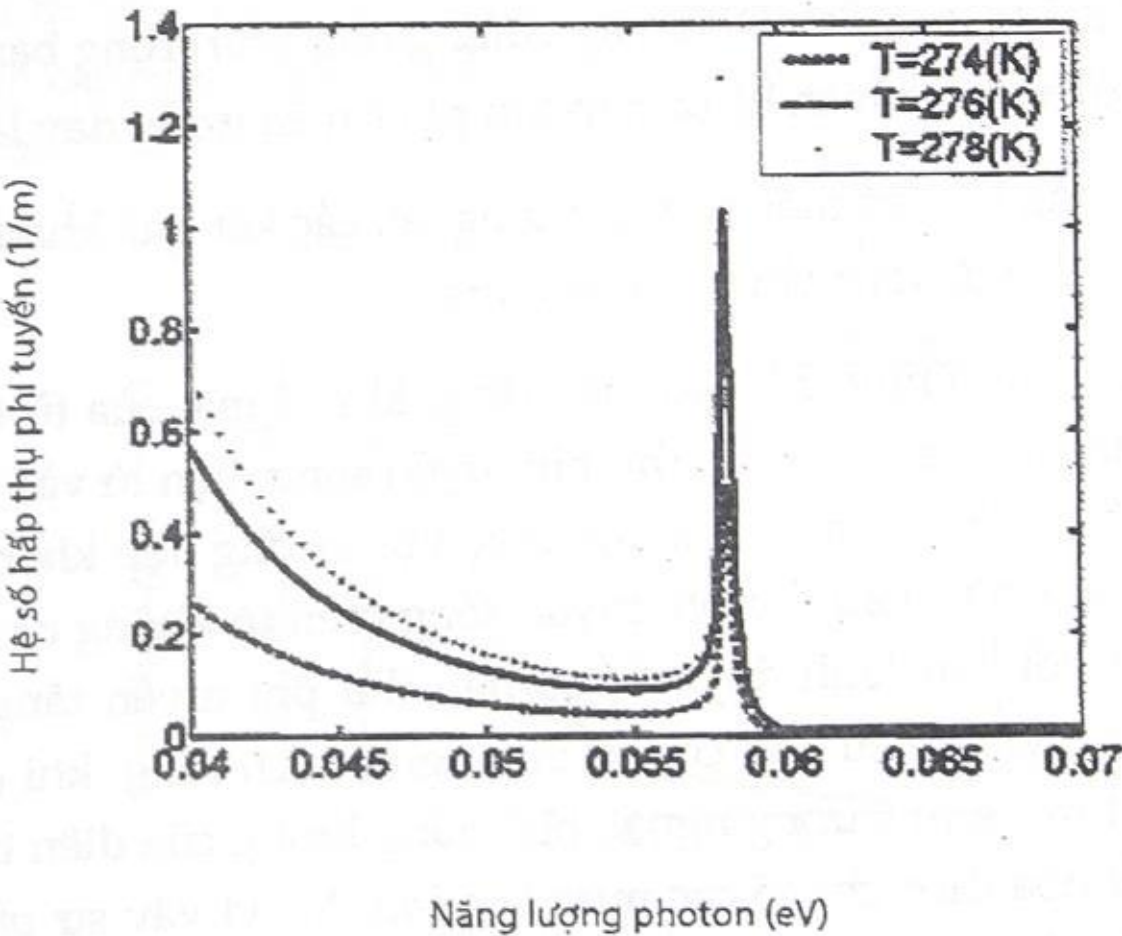
Trường hợp có mặt từ trường ngoài, các kết quả khảo sát cho hệ số hấp thụ sóng điện từ phi tuyến cho thấy:

Đồ thị trên hình 3.9 cho thấy rằng, khi có mặt của từ trường ngoài, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây lượng tử đã có sự thay đổi đáng kể so với trường hợp không có mặt của từ trường. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ không có đỉnh hấp thụ khi thay đổi bán kính dây. Hệ số hấp thụ phi tuyến tăng lên khi bán kính dây giảm. Điều này có thể được giải thích rằng, khi dây lượng tử được đặt trong từ trường ngoài, phổ năng lượng của điện tử có thêm sự lượng tử hóa theo chỉ số các mức Landau N , vì vậy sự phụ thuộc vào bán kính dây của hệ số hấp thụ phi tuyến đã có sự thay đổi đáng kể. Sự có mặt của từ trường ngoài cũng đã làm thay đổi sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ của hệ (Hình 3.10), hệ số

hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tăng lên khi nhiệt độ T và cường độ E_0 của sóng điện từ tăng.

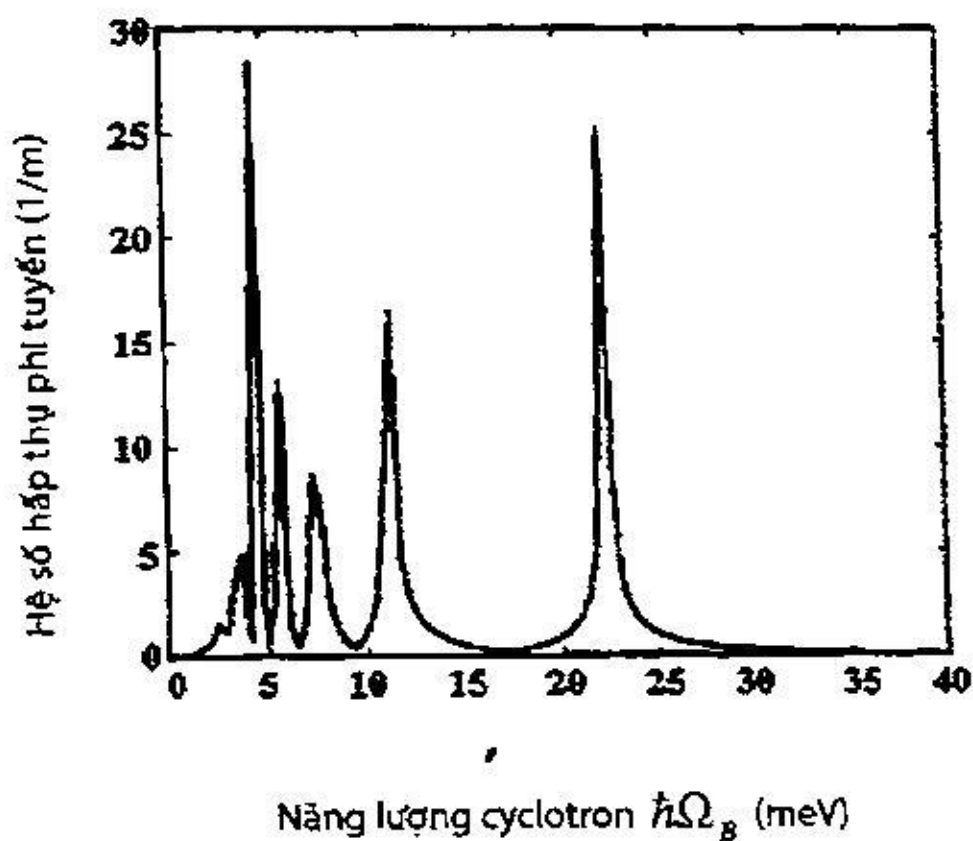


Hình 3.10: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào nhiệt độ T (K) của hệ và cường độ sóng điện từ E_0 khi có mặt của từ trường ngoài.



Hình 3.11: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào năng lượng photon $\hbar\Omega_B$ khi có mặt của từ trường ngoài.

Đồ thị trên hình 3.11 thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon khi có mặt của từ trường ngoài. Khác với trường hợp không có mặt của từ trường, đỉnh hấp thụ nhọn hơn rất nhiều và hệ số hấp thụ chỉ có giá trị đáng kể gần đỉnh hấp thụ. Điều này thể hiện sự tác động của từ trường lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện từ giam cầm trong dây lượng tử, khi có mặt của từ trường ngoài, phổ năng lượng của điện tử bị gián đoạn theo các mức Landau, sự chuyển mức năng lượng của điện tử sau khi hấp thụ sóng điện từ phải thỏa mãn điều kiện $\Omega - \omega_o + M^* \omega_c = 0$.



Hình 3.12: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào năng lượng cyclotron $\hbar\Omega_B$

Đồ thị trên hình 3.12 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α vào năng lượng cyclotron ($\hbar\omega_c$) trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn. Ta có thể thấy hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ có những đỉnh cộng hưởng nhọn tại những giá trị khác nhau của tần số cyclotron. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ chỉ có giá trị đáng kể ở vị trí đỉnh cộng hưởng này. Điều này cho thấy rằng chỉ số mức Landau mà điện tử sau khi hấp thụ dịch chuyển đến phải được xác định và phải thỏa mãn điều kiện $\Omega - \omega_o + M^* \omega_c = 0$, đây là sự khác

biệt so với bán dẫn khối. Một điều nữa có thể nhận thấy là mật độ các đỉnh hấp thụ dày khi $\omega_c < \Omega$ và nó thưa dần khi tần số cyclotron ω_c tăng lên. Nó thể hiện sự ảnh hưởng của từ trường lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ, khi từ trường mạnh lên, sự ảnh hưởng của nó càng lớn, phổ hấp thụ càng trở nên gián đoạn.

Kết luận:

Bằng phương pháp phương trình động lượng từ, biểu thức của phương trình động lượng từ cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn đã được thiết lập. Từ đó hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh đã thu được cho cả hai trường hợp vắng mặt và có mặt của từ trường. Trong đó, với trường hợp vắng mặt của từ trường, hai cơ chế tán xạ điện tử-phonon âm và tán xạ điện tử-phonon quang đã được xem xét. Các biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào các tham số như nhiệt độ T của hệ, cường độ E_0 và tần số Ω của sóng điện từ và bán kính R của dây lượng tử hình trụ là không tuyến tính. Đồng thời nó cũng có những khác biệt so với bán dẫn khối cũng như hệ hai chiều. Biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh khi có mặt của từ trường trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường có sự tham gia của các tham số đặc trưng của từ trường như tần số cyclotron ω_c , các chỉ số mức Landau N, N' . Điều này cho thấy có sự tác động mạnh mẽ của từ trường lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong dây lượng tử.

Các biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đã được áp dụng tính số cho dây lượng tử $GaAs/GaAsAl$, đây là vật liệu thường được sử dụng tính số bởi các nghiên cứu trước đó. Kết quả tính số cho thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong dây lượng tử lớn hơn nhiều so với bán dẫn khối cũng như hệ hai chiều đồng thời có sự khác biệt mới so với các kết quả nghiên cứu trước đó. Ví dụ: Trong sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào nhiệt độ của hệ, các nghiên cứu trước đó đối với bán dẫn khối cũng như hệ thấp chiều cho

thấy hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tăng lên khi nhiệt độ của hệ tăng. Tuy nhiên trong chương này ta thấy rằng hệ số hấp thụ chỉ tăng lên đến một giá trị cực đại nào đó tương ứng với một nhiệt độ xác định, nếu tiếp tục tăng nhiệt độ, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh lại giảm xuống. Điều này có thể được lý giải rằng ở nhiệt độ cao điều kiện để quan sát các hiệu ứng giảm kích thước không được thỏa mãn. Sự tác động của hiệu ứng giảm kích thước lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong dây lượng tử giảm đáng kể. Kết quả tính số cũng cho thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong cơ chế tán xạ điện tử-phonon quang lớn hơn nhiều so với tán xạ điện tử-phonon âm. Sự hấp thụ gần ngưỡng lớn hơn rất nhiều so với sự hấp thụ xa ngưỡng, đặc biệt khi tần số sóng điện từ mạnh trùng với tần số của phonon quang, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ có được giá trị cực đại.

Khi có sự tham gia của từ trường ngoài, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ có sự thay đổi đáng kể do tác động mạnh mẽ của từ trường lên phổ năng lượng của điện tử giam cầm. Phổ hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trở nên gián đoạn rõ rệt bao gồm các đỉnh hấp thụ rất nhọn và gián đoạn. Sự gián đoạn này càng lớn khi tần số cyclotron ω_c của từ trường tăng lên. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh khi có mặt của từ trường cũng lớn hơn.

3.2. HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG DÂY LƯỢNG TỬ HÌNH TRỤ HỐ THỂ PARABOL

Trong phần này sẽ trình bày kết quả hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol.

3.2.1. Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol

Hàm sóng và phổ năng lượng được xác định trong (1.44) và (1.45). Bỏ qua tương tác của các hạt cùng loại, Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol được viết như sau:

$$H = \sum_{n,\ell,\bar{p}} \varepsilon_{n,\ell} (\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}} + \sum_{\bar{q}} \omega_{\bar{q}} b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} + \sum_{n,\ell,n',\ell',\bar{p},\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q}) a_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}^+ a_{n',\ell',\bar{p}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \quad (3.78)$$

trong đó $\bar{A}(t) = \frac{c}{\Omega} \bar{E}_0 \cos(\Omega t)$; $I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})$ là thừa số dạng được xác định:

$$I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q}) = \frac{2}{R^2} \int_0^R \psi_{n,\ell}(r) e^{i\bar{q}r} \psi_{n',\ell'}^*(r) r dr, \quad (3.79)$$

trong đó hàm sóng $\psi_{n,\ell}(r)$ được xác định theo biểu thức dưới đây:

$$\Psi = \frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2n!}{(n+|\ell|)!}} \frac{1}{a_0} e^{-\frac{r^2}{2a_0^2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^{|\ell|} L_n^{|\ell|}\left(\frac{r^2}{a_0^2}\right)$$

với $L_n^{|\ell|}$ là đa thức Laguerre tổng quát.

Khi có mặt từ trường ngoài:

Giả sử có một từ trường đều đặt song song với trục của dây. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong dây lượng tử khi có mặt của từ trường được viết như sau:

$$H = \sum_{\gamma,\bar{p}} \varepsilon_{\gamma}^H (\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) a_{\gamma,\bar{p}}^+ a_{\gamma,\bar{p}} + \sum_{\bar{q}} \omega_{\bar{q}} b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} + \sum_{\gamma,\gamma',\bar{p},\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q}) J_{N,N'}(u) a_{\gamma,\bar{p}+\bar{q}}^+ a_{\gamma',\bar{p}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+), \quad (3.80)$$

trong đó γ và γ' lần lượt là các bộ số lượng tử (N, n, ℓ) và (N', n', ℓ') của điện tử dưới tác dụng của từ trường ngoài, N, N' là các chỉ số vùng Landau ($N = 0, 1, 2, \dots$), $\varepsilon_{n,\ell}^H (\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t))$ là phổ năng lượng của điện tử dưới tác dụng của sóng điện tử với thể vector $\bar{A}(t)$ khi có mặt của từ trường được xác định theo biểu thức sau:

$$\varepsilon_{n,\ell}^H (\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) = \frac{(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t))^2}{M} + \omega_1(n+1/2) + \omega_2(\ell+1/2),$$

trong đó $\omega_x = eB_x / mc$, $\omega_y = eB_y / mc$ là tần số cyclotron theo hai phương x, y; $\omega_1^2 = \Omega_x^2 + \omega_y^2$, $\omega_2^2 = \Omega_y^2 + \omega_x^2$; $l_x = \sqrt{1/4m\Omega_x}$, $l_y = \sqrt{1/4m\Omega_y}$; $M = m[1 + (\omega_x / \Omega_y)^2 + (\omega_y / \Omega_x)^2]$; $a_{\gamma, \bar{p}}^+$ ($a_{\gamma, \bar{p}}$) là toán tử sinh (huỷ) của một electron trong dây lượng tử khi có mặt từ trường ngoài; $b_{\bar{q}}^+$ ($b_{\bar{q}}$) là toán tử sinh (huỷ) một phonon ở trạng thái có vectơ sóng $\bar{q}$; $\omega_{\bar{q}}$ là tần số của phonon; $C_{\bar{q}}$ là hệ số tương tác điện tử-phonon; $I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})$ là thừa số dạng đặc trưng cho sự giam nhốt điện tử trong dây lượng tử và trong một số trường hợp riêng được xác định như sau:

$$I_{0,0,0,0}(q_z) = \int_0^\infty \frac{e^\zeta d\zeta}{(2\zeta + q_z^2 l_x^2)(2\zeta + q_z^2 l_y^2)} \quad (3.81)$$

$$I_{1,0,0,0}(q_z) = I_{0,0,0,0}(q_z) + \frac{2}{q_z^2 l_x^2 - q_z^2 l_y^2} \int_0^\infty (1-\zeta) e^\zeta \sqrt{\frac{2\zeta + q_z^2 l_y^2}{2\zeta + q_z^2 l_x^2}} d\zeta \quad (3.82)$$

với $J_{N,N'}(u)$ là tích phân được xác định như sau:

$$J_{N,N'}(u) = \int_{-\infty}^\infty dr \phi_{N'}(r_\perp - a_c^2(p_z - q_\perp)) e^{iq_\perp p_z} \phi_N(r_\perp - a_c^2 p_z) \quad (3.83)$$

ở đây $u = a_c q_\perp^2 / 2$, $r_\perp$ và $a_c = c / eB$ lần lượt là vị trí và bán kính quỹ đạo cyclotron.

3.2.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol

Để thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol, chúng ta bắt đầu từ phương trình động lượng tử cho toán tử số hạt điện tử trong dây lượng tử $n_{n, \ell, \bar{p}}(t) = \langle a_{n, \ell, \bar{p}}^+ a_{n, \ell, \bar{p}} \rangle_t$ ta có:

$$i \frac{\partial n_{n, \ell, \bar{p}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{n, \ell, \bar{p}}^+ a_{n, \ell, \bar{p}}, H] \rangle_t \quad (3.84)$$

Sử dụng Hamiltonian (3.1) và các phép biến đổi toán tử ta được:

$$i \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = \sum_{n',\ell',\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q}) [F_{n,\ell,\bar{p},n',\ell',\bar{p}-\bar{q},\bar{q}}(t) + F_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q},n,\ell,\bar{p},-\bar{q}}^*(t) - F_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q},n,\ell,\bar{p},\bar{q}}(t) - F_{n,\ell,\bar{p},n',\ell',\bar{p}+\bar{q},-\bar{q}}^*(t)] \quad (3.85)$$

trong đó

$$F_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1,n_2,\ell_2,\bar{p}_2,\bar{q}}(t) = \langle a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} b_{\bar{q}} \rangle_t = F(t)$$

Để tìm $F(t)$ ta xây dựng phương trình động cho $F(t)$ như sau:

$$i \frac{\partial F(t)}{\partial t} = i \frac{\partial F_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1,n_2,\ell_2,\bar{p}_2,\bar{q}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} b_{\bar{q}}, H] \rangle_t \quad (3.86)$$

Một cách tương tự chúng ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t)}{\partial t} = & i[\varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p}_1 - \frac{e}{c}\bar{A}(t)) - \varepsilon_{n_2,\ell_2}(\bar{p}_2 - \frac{e}{c}\bar{A}(t)) - \omega_{\bar{q}}]F(t) \\ & + i \sum_{n_3,\ell_3,\bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} [I_{n_1,\ell_1,n_3,\ell_3}(\bar{q}) \langle a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_1+\bar{q}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_t - \\ & I_{n_2,\ell_2,n_3,\ell_3} \langle a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_2-\bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_t] \end{aligned} \quad (3.87)$$

Giải phương trình vi phân trên theo phương pháp biến phân và sử dụng giả thiết đoạn nhiệt, ta thu được biểu thức của $F(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) = & i \sum_{n_3,\ell_3,\bar{q}_1} C_{\bar{q}_1} \int_{-\infty}^t [I_{n_1,\ell_1,n_3,\ell_3}(\bar{q}) \langle a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_1+\bar{q}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\bar{p}_2} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) b_{\bar{q}} \rangle_{t_2} - \\ & I_{n_2,\ell_2,n_3,\ell_3}(\bar{q}) \langle a_{n_1,\ell_1,\bar{p}_1}^+ a_{n_3,\ell_3,\bar{p}_2-\bar{q}_1} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}_1} + b_{-\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \times \exp\{i[\frac{\bar{p}_1^2 - \bar{p}_2^2}{2m} + \\ & + \omega_0^*(2n_1 - 2n_2 + |\ell_1| - |\ell_2|) - \omega_{\bar{q}}](t - t_2) - \frac{ie}{mc} \int_{-\infty}^{t_1} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1\} dt_2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Thay (3.88) vào (3.85) ta có và thực hiện một số phép chuyển đổi ta thu được:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = & \sum_{n',\ell',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 \int_{-\infty}^t dt_2 \exp\left[-\frac{ie}{mc} \int_{-\infty}^t \bar{p}\bar{A}(t_1)dt_1\right] \times \\
& \{[n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t_2)N_{\bar{q}} - n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)(N_{\bar{q}}+1)] \times \\
& \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2}{2m} + \omega_0^*(2n-2n'+|\ell|-|\ell'|) - \omega_{\bar{q}})(t-t_2)] \\
& + [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t_2)(N_{\bar{q}}+1) - n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)N_{\bar{q}}] \times \\
& \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2}{2m} + \omega_0^*(2n-2n'+|\ell|-|\ell'|) + \omega_{\bar{q}})(t-t_2)] \\
& \times \exp[i(\frac{(\bar{p}+\bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_0^*(2n'-2n+|\ell'|-|\ell|) - \omega_{\bar{q}})(t-t_2)] \\
& + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)(N_{\bar{q}}+1) - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t_2)N_{\bar{q}}] \times \\
& \times \exp[i(\frac{(\bar{p}+\bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_0^*(2n'-2n+|\ell'|-|\ell|) + \omega_{\bar{q}})(t-t_2)]\} \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Sử dụng biểu thức của thế vectơ $\bar{A}(t)$ và công thức chuyển đổi hàm Bessel ta thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = & \sum_{n',\ell',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\
& \times \exp\{-i(k-s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{[n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t')N_{\bar{q}} - n_{n,\ell,\bar{p}}(t')(N_{\bar{q}}+1)] \times \\
& \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2}{2m} + \omega_0^*(2n-2n'+|\ell|-|\ell'|) - \omega_{\bar{q}})(t-t')] + \\
& + [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t')(N_{\bar{q}}+1) - n_{n,\ell,\bar{p}}(t')N_{\bar{q}}] \times \\
& \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2}{2m} + \omega_0^*(2n-2n'+|\ell|-|\ell'|) + \omega_{\bar{q}})(t-t')] + \\
& + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t')N_{\bar{q}} - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t')(N_{\bar{q}}+1)] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left[i\left(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_0^*(2n' - 2n + |\ell'| - |\ell|) - \omega_{\bar{q}}\right)(t - t')\right] + \\
& + [n_{n, \ell, \bar{p}}(t')(N_{\bar{q}} + 1) - n_{n', \ell', \bar{p} + \bar{q}}(t')N_{\bar{q}}] \times \\
& \times \exp\left[i\left(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_0^*(2n' - 2n + |\ell'| - |\ell|) + \omega_{\bar{q}}\right)(t - t')\right] dt' \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Lưu ý rằng trong biểu thức (3.90) chúng ta đã thay $t_2 = t'$

Trường hợp có mặt từ trường ngoài, tính toán tương tự như trường hợp không có từ trường, để thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử chúng ta bắt đầu từ phương trình động lượng tử cho toán tử số hạt điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol khi có mặt của từ trường $n_{\gamma, \bar{p}}(t) = \langle a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma, \bar{p}} \rangle$, ta có:

$$i \frac{\partial n_{\gamma, \bar{p}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma, \bar{p}}, H] \rangle, \quad (3.91)$$

Sử dụng Hamiltonian (3.80) và các phép tính giải tích tương tự ta thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol khi có mặt của từ trường:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{\gamma, \bar{k}}(t)}{\partial t} &= \sum_{\gamma', \bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k, s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\
& \times \exp\{-i(k - s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{ [n_{\gamma', \bar{p} - \bar{q}}(t')N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}}(t')(N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
& \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \varepsilon_{\gamma', \bar{p} - \bar{q}} - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{\gamma', \bar{p} - \bar{q}}(t')(N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}}(t')N_{\bar{q}}] \times \\
& \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \varepsilon_{\gamma', \bar{p} - \bar{q}} + \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{\gamma, \bar{p}}(t')N_{\bar{q}} - n_{\gamma', \bar{p} + \bar{q}}(t')(N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
& \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma', \bar{p} + \bar{q}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}} - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + [n_{\gamma, \bar{p}}(t')(N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma', \bar{p} + \bar{q}}(t')N_{\bar{q}}] \times \\
& \times \exp[i(\varepsilon_{\gamma', \bar{p} + \bar{q}} - \varepsilon_{\gamma, \bar{p}} + \omega_{\bar{q}})(t - t']) \} dt' \quad (3.92)
\end{aligned}$$

Sử dụng phổ năng lượng của điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol khi có mặt của từ trường ta viết lại phương trình động lượng tử:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{\gamma, \bar{k}}(t)}{\partial t} = & \sum_{\gamma, \bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k, s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\
 & \times \exp\{-i(k-s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{[n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t') N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{M} + \omega_1(n - n') + \omega_2(\ell - \ell') - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{M} + \omega_1(n - n') + \omega_2(\ell - \ell') + \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}}(t') N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{M} + \omega_1(n' - n) + \omega_2(\ell' - \ell) - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{M} + \omega_1(n' - n) + \omega_2(\ell' - \ell) + \omega_{\bar{q}})(t - t')]\} dt' \quad (3.93)
 \end{aligned}$$

Như vậy, khi có mặt của từ trường ngoài, phương trình động lượng tử của điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol xuất hiện thêm các yếu tố mới đặc trưng cho sự tương tác của từ trường lên điện tử trong dây lượng tử.

Với mô hình dây lượng tử hình trụ hố thế parabol, hai phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm đã được thu nhận. Sự thay đổi thế giam giữ điện tử đã tác động làm thay đổi hàm sóng cũng như phổ năng lượng của điện tử, kết quả đã thu được các phương trình động lượng tử cũng có sự thay đổi.

3.2.3. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol

Từ (3.90), để đơn giản cho việc giải phương trình động lượng từ này ta sử dụng phương pháp xấp xỉ gần đúng như sau:

$$n_{n,\ell,\bar{p}}(t') \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}, \quad n_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}, \quad n_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}},$$

ở đây $\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}$ là hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của điện tử. Hàm phân bố không cân bằng thu được từ việc giải gần đúng xấp xỉ phương trình động lượng từ cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol khi vắng mặt từ trường ngoài thu được:

$$\begin{aligned} n_{n,\ell,\bar{p}}(t) = & - \sum_{\bar{q},n',\ell'} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 \sum_{k,j=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_{k+j}\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \frac{1}{i\Omega} e^{-i\Omega t} \\ & \times \left\{ - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell',\bar{p}+\bar{q}}N_{\bar{q}}}{((\bar{p}+\bar{q})^2 - \bar{p}^2)/2m + \omega_0^*(2n'-2n+|\ell'|-|\ell|) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right. \\ & - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell',\bar{p}+\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1)}{((\bar{p}+\bar{q})^2 - \bar{p}^2)/2m + \omega_0^*(2n'-2n+|\ell'|-|\ell|) - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \\ & + \frac{\bar{n}_{n,\ell',\bar{p}-\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}N_{\bar{q}}}{(\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2)/2m + \omega_0^*(2n-2n'+|\ell|-|\ell'|) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \\ & \left. + \frac{\bar{n}_{n,\ell',\bar{p}-\bar{q}}N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1)}{(\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2)/2m + \omega_0^*(2n-2n'+|\ell|-|\ell'|) - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right\}, \quad (3.94) \end{aligned}$$

Sử dụng biểu thức của hàm phân bố điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol (3.94), thực hiện các tính toán tương tự trong dây hình trụ hố thế cao vô hạn, biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol cho cả hai trường hợp tán xạ điện tử-phonon thu được:

$$\alpha = \frac{8\pi^2\Omega}{c\sqrt{\chi_\infty}E_0^2} \sum_{n,\ell,n',\ell'} |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 \sum_{\bar{q},\bar{p}} |C_{\bar{q}}|^2 N_{\bar{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}} - \bar{n}_{n,\ell',\bar{p}+\bar{q}}] \times$$

$$\times kJ_k^2 \left(\frac{eE_0 \bar{q}}{m\Omega^2} \right) \{ [\delta((\bar{q}^2 + 2\bar{p}\bar{q})/2m + \omega_0^*(2n' - 2n + |\ell'| - |\ell|) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega)] \\ + [\omega_{\bar{q}} \rightarrow -\omega_{\bar{q}}] \}, \quad (3.95)$$

a) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang

Đối với trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang, hằng số tương tác $C_{\bar{q}}$ được xác định theo biểu thức (2.3), tần số phonon $\omega_{\bar{q}} \equiv \omega_0$ là tần số phonon quang. Chúng ta xem xét theo hai trường hợp: hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Để có được sự hấp thụ phi tuyến sóng điện tử ở gần ngưỡng, điều kiện $|k\Omega - \omega_0| \ll \bar{\epsilon}$ phải được thỏa mãn. Biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol, trường hợp hấp thụ gần ngưỡng thu được:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi} e^4 n_0^* (k_b T)^{3/2}}{4c\epsilon_0 \sqrt{m\chi_\infty} \Omega^3 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 \{ [\exp\{\frac{1}{k_b T} B_2\}] \times \\ \times [\exp\{\frac{1}{k_b T} (\omega_0 - \Omega)\} - 1] [1 + \frac{3e^2 E_0^2 k_b T}{8m\Omega^4} (1 + \frac{B_2}{2k_b T})] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \}, \quad (3.96)$$

ở đây $B_2 = \omega_0^*(2n' - 2n + |\ell'| - |\ell|) + \omega_0 - \Omega$.

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trong trường hợp này, hấp thụ phi tuyến sóng điện tử xảy ra khi điều kiện $|k\Omega - \omega_0| \gg \bar{\epsilon}$ được thỏa mãn, biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol trong trường hợp hấp thụ xa ngưỡng thu được:

$$\alpha = \frac{\pi^2 e^4 k_b T n_0}{c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 m \epsilon_0 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2$$

$$\times \left\{ \left[\left(1 + \frac{3e^2 E_0^2}{16m\Omega^4} (\omega_0^* (2n' - 2n + |\ell'| - |\ell|) + \omega_0 - \Omega) \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[1 - \exp \left[\frac{-\omega_0^* (2n + |\ell| + 1) - \omega_0 + \Omega}{k_b T} \right] \right] \right] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \right\}. \quad (3.97)$$

b) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm

Trong trường hợp này ω_q là tần số của phonon âm, vì $\omega_q \ll \Omega$ nên trong biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến (3.95) ta có thể bỏ qua số hạng ω_q . Hằng số tương tác điện tử - phonon âm được xác định theo (2.4). Tương tự như với dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn, biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm thu được như sau:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m\pi} e^2 n_0^* \xi^2 (k_b T)^{5/2}}{4c \sqrt{\chi_\infty} \rho v_s^2 \Omega^3 V} \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}|^2 \left[1 - \exp \left\{ \frac{\Omega}{k_b T} \right\} \right] \times \\ \exp \left\{ \frac{1}{2k_b T} D_1 \right\} \frac{D_2}{2k_b T} \left[1 + \frac{3e^2 E_0^2 (k_b T)^2}{4m\Omega^4 D_2} \left(\frac{D_2^2}{4(k_b T)^2} + \frac{3D_2}{4k_b T} + 3 \right) \right], \quad (3.98)$$

trong đó $D_2 = \omega_0^* (2n' - 2n + |\ell'| - |\ell|) - \Omega$. Biểu thức (3.98) là hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng với cơ chế tán xạ điện tử-phonon âm.

Khi có mặt từ trường ngoài, thực hiện phép tính tương tự như trường hợp vắng mặt của từ trường, để thu được biểu thức của hàm phân bố điện tử khi có mặt của từ trường ngoài ta sử dụng sử dụng phương pháp xấp xỉ gần đúng như sau:

$$n_{\gamma, \vec{p}}(t') \approx \bar{n}_{\gamma, \vec{p}}, \quad n_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}(t') \approx \bar{n}_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}, \quad n_{\gamma, \vec{p}-\vec{q}}(t') \approx \bar{n}_{\gamma, \vec{p}-\vec{q}}.$$

ở đây $\bar{n}_{\gamma, \vec{p}}$ là hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của điện tử. Hàm phân bố của điện tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol khi có mặt của từ trường được thay lần lượt vào biểu thức của mật độ dòng hạt

tại (1.23) và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ (1.22), thực hiện tính toán, biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol khi có mặt của từ trường ngoài như sau:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 \Omega}{c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \sum_{\gamma, \gamma'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{\vec{q}, \vec{p}} |C_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k J_k^2\left(\frac{eE_0 \vec{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\ \times [\bar{n}_{\gamma, \vec{p}} - \bar{n}_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}] \{ \delta(\varepsilon_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma, \vec{p}}^H + \omega_{\vec{q}} - k\Omega) + [\omega_{\vec{q}} \rightarrow -\omega_{\vec{q}}] \}, \quad (3.99)$$

Xét cho trường hợp tán xạ điện từ-phonon quang, $\omega_{\vec{q}} \equiv \omega_o$. Biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến được viết lại cho trường hợp tán xạ điện từ phonon quang:

$$\alpha = \frac{16\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{V \varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma', \vec{q}, \vec{p}} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2} k \times \\ \times J_k^2\left(\frac{eE_0 \vec{q}}{m\Omega^2}\right) [\bar{n}_{\gamma, \vec{p}} - \bar{n}_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}] \{ \delta(\varepsilon_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma, \vec{p}}^H + \omega_o - k\Omega) + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \}, \quad (3.100)$$

Xét trường hợp điện từ không suy biến với $\bar{n}_{\gamma, \vec{p}}$ được xác định theo (3.93), sử dụng công thức chuyển tổng thành tích phân ta thu được:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 e^2 \Omega k_B T n_o^* m \omega_o}{\varepsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} V E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma'} \sum_{\vec{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |I_{n, \ell, n', \ell'}|^2 |J_{N, N'}|^2 \times \\ \times k J_k^2\left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}}{2m\Omega^2}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon_{\gamma}^H}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\gamma'}^H}{k_B T}\right) \right] \times \\ \times \frac{1}{q^2} \{ [\delta(\varepsilon_{\gamma, \vec{p}+\vec{q}}^H - \varepsilon_{\gamma, \vec{p}}^H + \omega_o - k\Omega)] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \} \quad (3.101)$$

Hạn chế gần đúng bậc hai của hàm Bessel và sử dụng công thức chuyển tổng thành tích phân ta thu được:

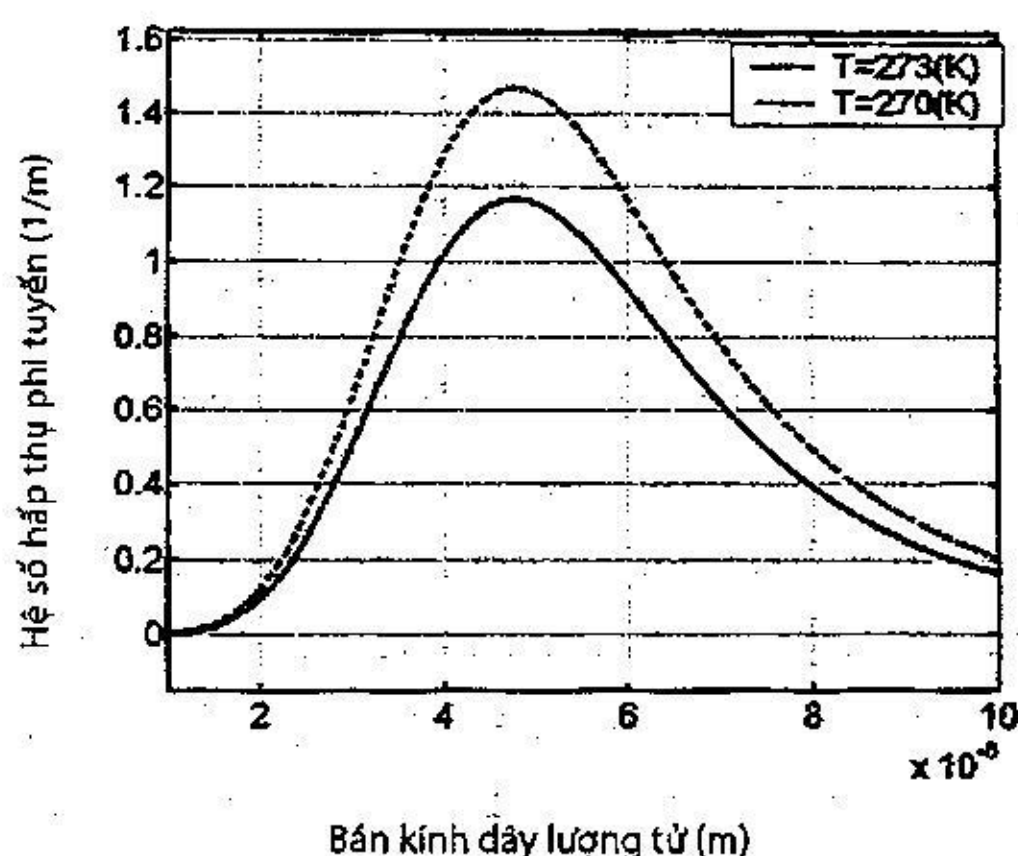
$$\alpha = \frac{8\pi^2 e^2 \Omega k_B T n_o^* m \omega_o}{c \sqrt{\chi_\infty} \varepsilon_0 E_0^2 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \left(\frac{e\vec{E}_0}{2m\Omega^2} \right)^2 \sum_{\gamma, \gamma'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \times$$

3.2.4. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

Để thấy được tường minh sự phụ thuộc về cả định tính lẫn định lượng của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện từ giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol, trong phần này, các tính toán số được thực hiện cho dây lượng tử hình trụ hố thế parabol $GaAs / GaAsAl$. Các số liệu tính số được cho ở Bảng 3.1.

Dưới đây trình bày các kết quả khảo sát hệ số hấp thụ trong trường hợp vắng mặt từ trường với các cơ chế tán xạ khác nhau:

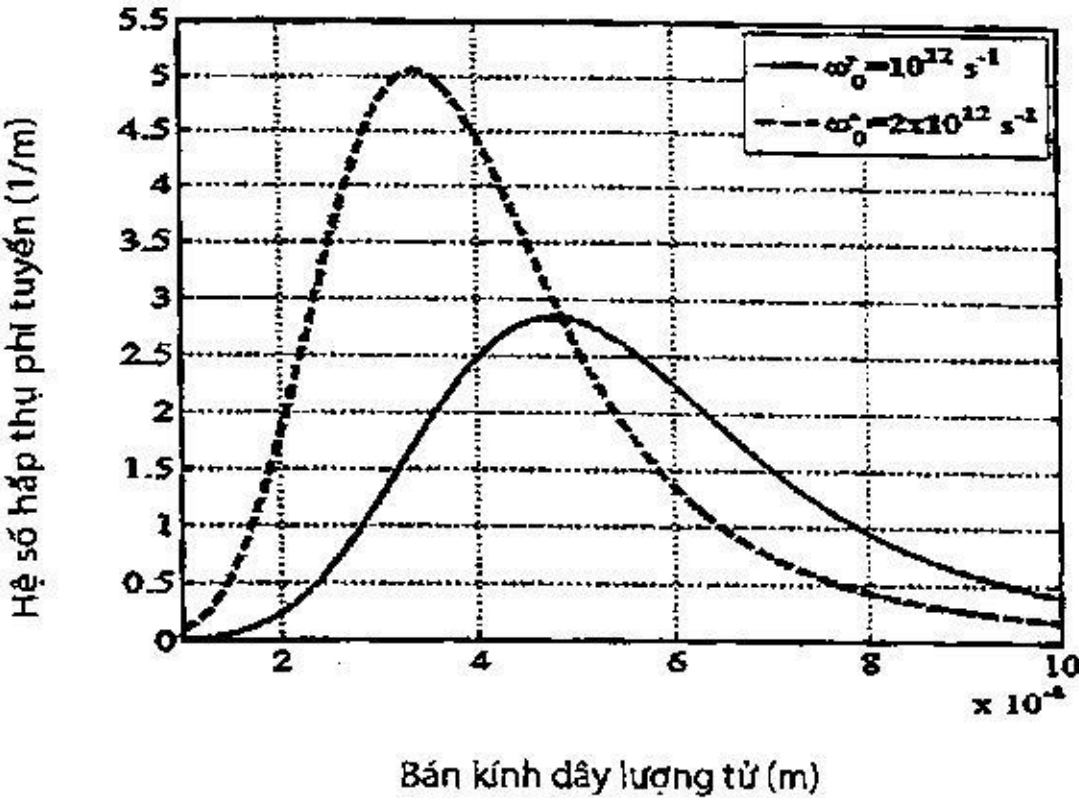
a) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang



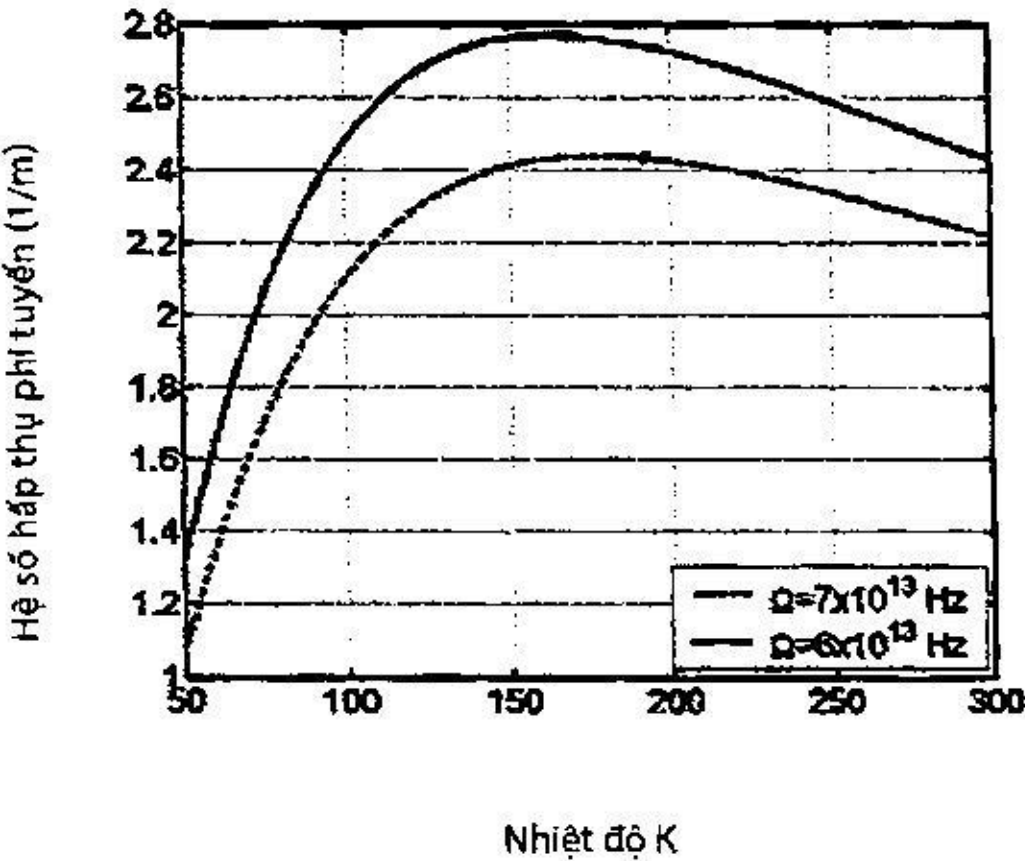
Hình 3.13: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây lượng tử trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol với các giá trị khác nhau của nhiệt độ T của hệ, trường hợp hấp thụ gần ngưỡng

Đồ thị trên hình 3.13 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây tại các giá trị khác nhau của nhiệt độ T của hệ. Nó cho thấy rằng, giống như trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol xuất hiện các đỉnh hấp thụ tại một giá trị xác định của bán kính dây. Tuy nhiên, khác với dây lượng tử hình trụ hố thế

cao vô hạn, giá trị của bán kính dây mà tại đó hệ số hấp thụ phi tuyến đạt giá trị cực đại không thay đổi khi nhiệt độ của hệ thay đổi.



Hình 3.14: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây với các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng ω_0^* của hố thế trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol, trường hợp hấp thụ xa ngưỡng.



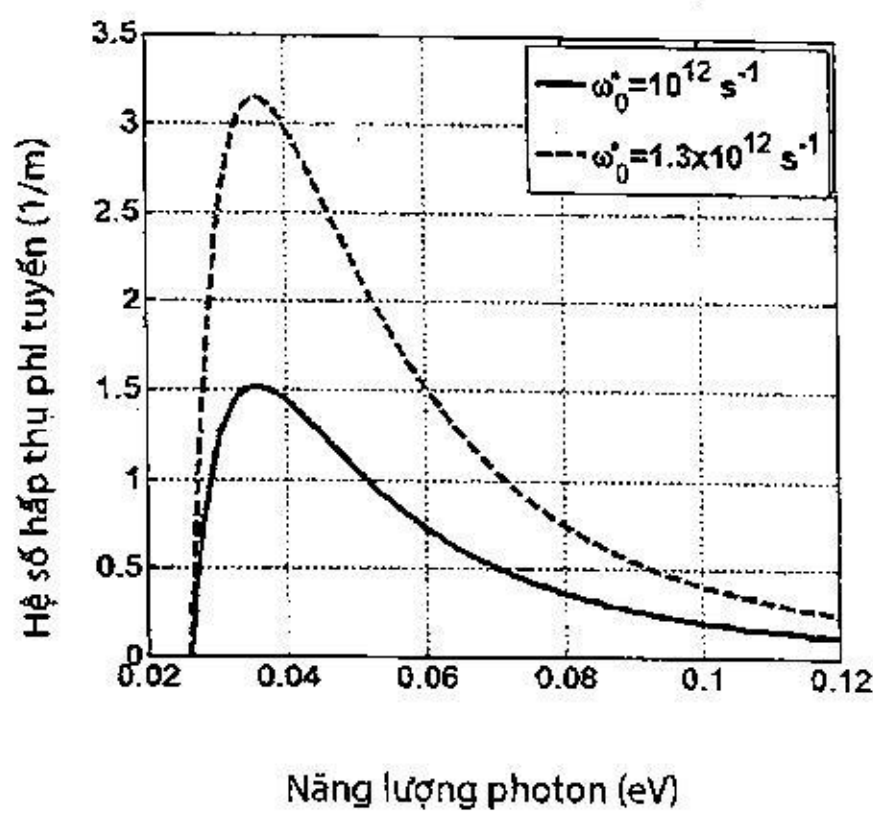
Hình 3.15: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ T của hệ với các giá trị khác nhau của tần số sóng điện từ Ω (Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng).

Đồ thị trên hình 3.14 cho thấy rằng giá trị của bán kính dây mà ở đó hệ số hấp thụ phi tuyến đạt giá trị cực đại thay đổi khi ta thay đổi giá trị của tần số hiệu dụng của hố thế. Ví dụ: khi $\omega_0^* = 10^{12} \text{ s}^{-1}$, hệ số hấp thụ phi tuyến đạt cực đại ở bán kính $R = 48 \text{ nm}$ và nếu tăng tần số hiệu dụng lên $2 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ thì hệ số hấp thụ phi tuyến đạt cực đại ở bán kính $R = 35 \text{ nm}$. Điều này cho thấy rằng, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ phụ thuộc mạnh vào tần số hiệu dụng của hố thế. Một sự khác biệt nữa khi so sánh với dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn là với dây lượng tử hình trụ hố thế parabol, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ không nhận giá trị âm khi thay đổi bán kính dây. Như vậy, đồ thị trên hình 3.13 và 3.14 cho ta thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol phụ thuộc mạnh vào các tham số cấu trúc của dây như bán kính R , tần số hiệu dụng của hố thế ω_0^* và có những khác biệt so với trường hợp dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn. Điều này cho thấy sự ảnh hưởng đáng kể của thế giam cầm điện từ trong dây lượng tử vào sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ.

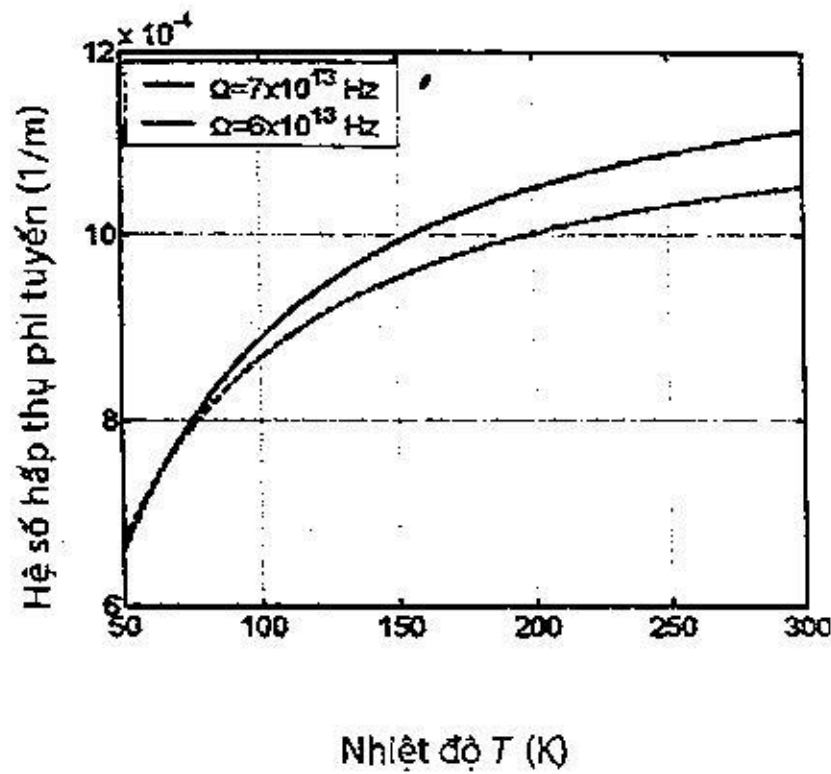
Đồ thị trên hình 3.15 thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ T của hệ. Cũng như trong dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử cũng đạt giá trị cực đại ở một giá trị xác định của nhiệt độ T . Tuy nhiên hệ số hấp thụ phi tuyến khi đã đạt giá trị cực đại không giảm nhanh khi tăng nhiệt độ của hệ như trong dây hình trụ hố thế cao vô hạn. Như vậy đã có sự thay đổi về mặt định tính cũng như định lượng của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử khi sử dụng các thế giam cầm điện từ khác nhau.

Đồ thị trên hình 3.16 cho thấy rằng, về mặt định tính, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol không thay đổi dạng phụ thuộc vào năng lượng photon khi so sánh với dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đạt được đỉnh hấp thụ khi tần số sóng điện từ trùng với tần số phonon quang ($\Omega = \omega$). Tuy nhiên, về mặt định lượng hệ số hấp thụ sóng điện từ phụ thuộc mạnh vào tham số cấu trúc của hố thế ω_0^* . Ví dụ: tại

$\omega_0^* = 10^{12} \text{ s}^{-1}$, giá trị cực đại của hệ số hấp thụ là $1,5 \text{ m}^{-1}$, tuy nhiên tại $\omega_0^* = 1,3 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ giá trị này của hệ số hấp thụ tăng đến khoảng $3,4 \text{ m}^{-1}$. Điều này cho thấy rằng đã có sự thay đổi định lượng của sự hấp thụ sóng điện từ mạnh khi thay đổi thế giam cầm điện tử trong dây lượng tử.



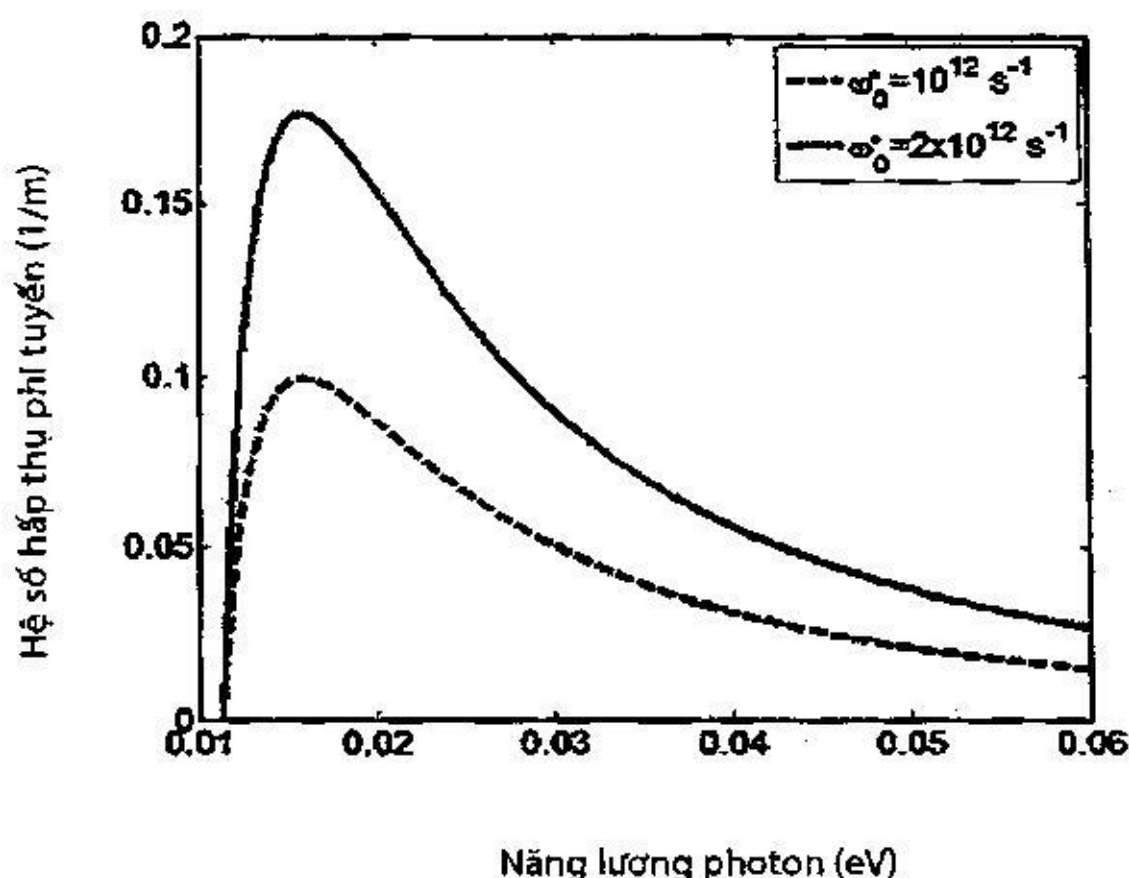
Hình 3.16: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon với các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hố thế ω_0^* , trường hợp hấp thụ gần ngưỡng.



Hình 3.17: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ T của hệ với các giá trị khác nhau của tần số sóng điện từ Ω , trường hợp hấp thụ xa ngưỡng.

Trong trường hợp hấp thụ xa ngưỡng, đồ thị trên hình 3.17 cho thấy rằng, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ của hệ đã có sự khác biệt so với trường hợp hấp thụ gần ngưỡng. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tăng khi nhiệt độ của hệ tăng. Tuy nhiên ở nhiệt độ cao, hệ số hấp thụ phi tuyến gần như được bão hòa. Đồ thị trên hình 3.17 cũng cho thấy tần số sóng điện từ Ω lớn hơn thì hệ số hấp thụ lại bé hơn. Có nghĩa là càng xa ngưỡng thì khả năng hấp thụ sóng điện từ càng giảm.

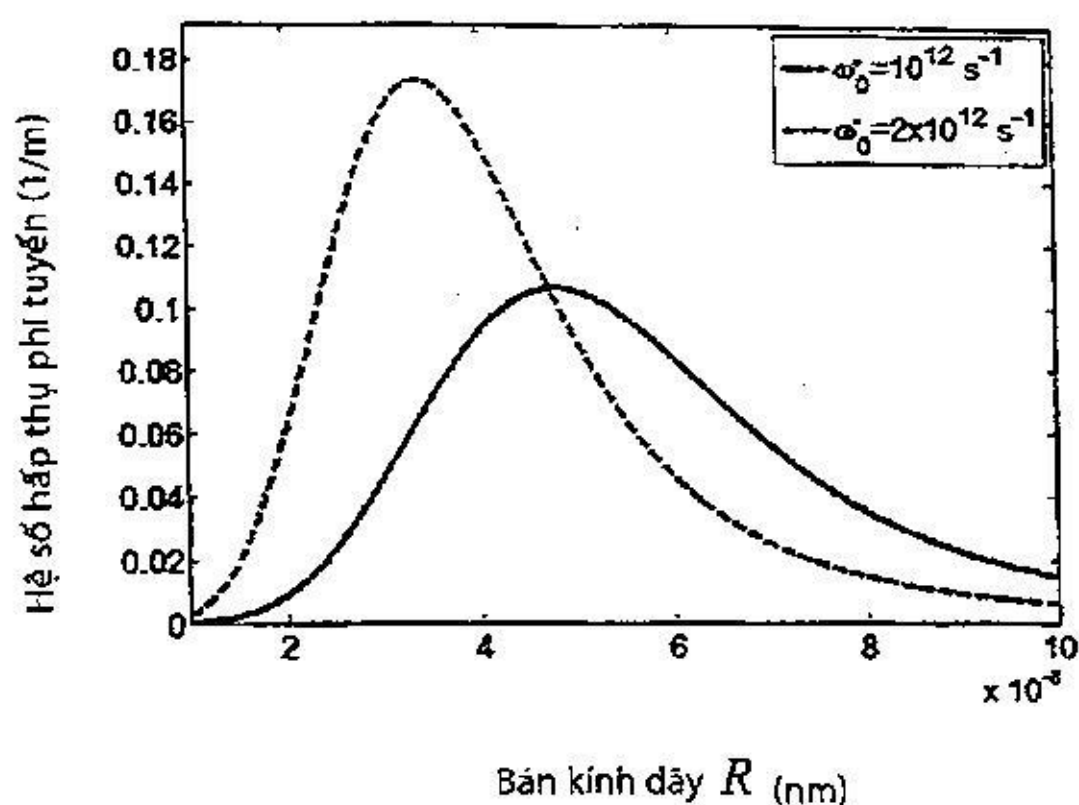
b) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm



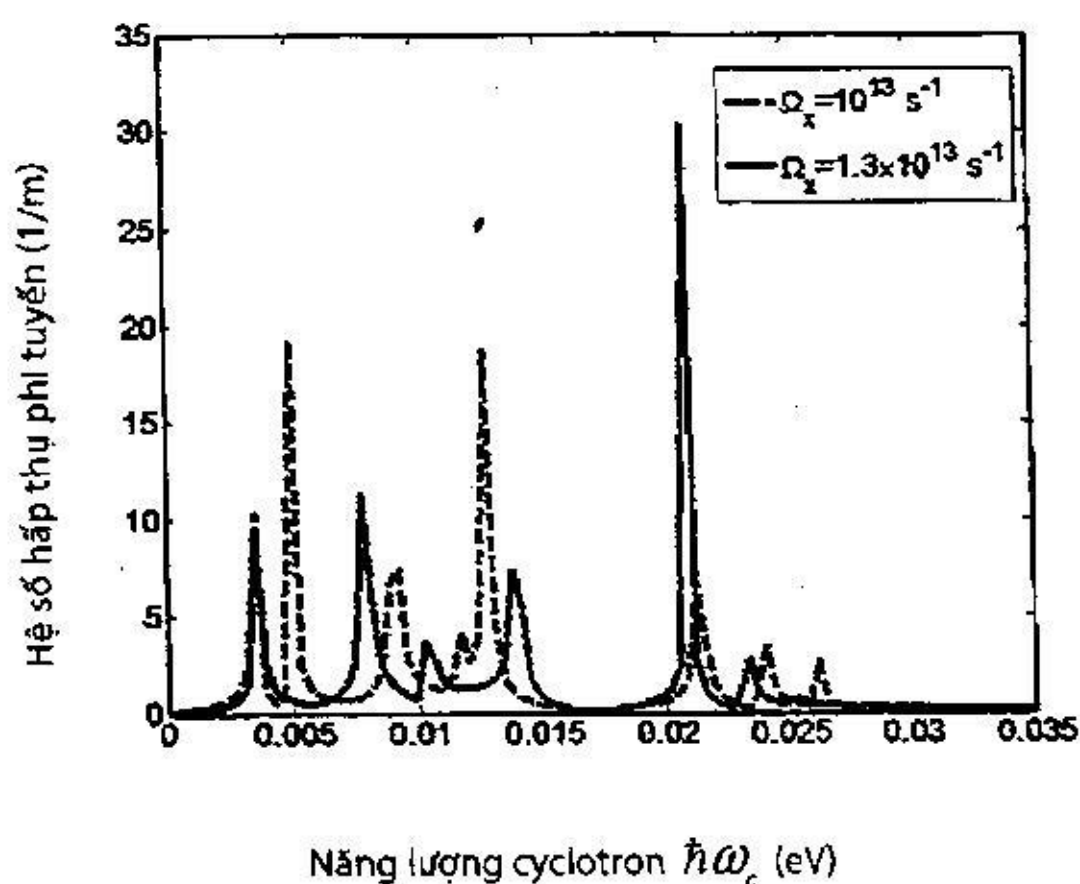
Hình 3.18: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon tại các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hố thế ω_0^* , trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm.

Với trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm, hình 3.18 và hình 3.19 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon và bán kính dây tại các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hố thế giam cầm ω_0^* . Về mặt định tính, sự phụ thuộc này giống như trong tán xạ điện tử-phonon quang. Tuy nhiên, giá trị định lượng đã có sự thay đổi lớn. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm bé hơn nhiều. Tần số hiệu dụng ω_0^* của hố

thế giam giữ điện tử cũng ảnh hưởng lớn đến sự hấp thụ sóng điện từ, khi thay đổi tần số ω_0^* , giá trị của hệ số hấp thụ cũng thay đổi.



Hình 3.19: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây R với các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hố thế ω_0^* , trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm.



Hình 3.20: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng cyclotron $\hbar\omega_c$ với các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng Ω_x của hố thế tại $\Omega_y = 2 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$

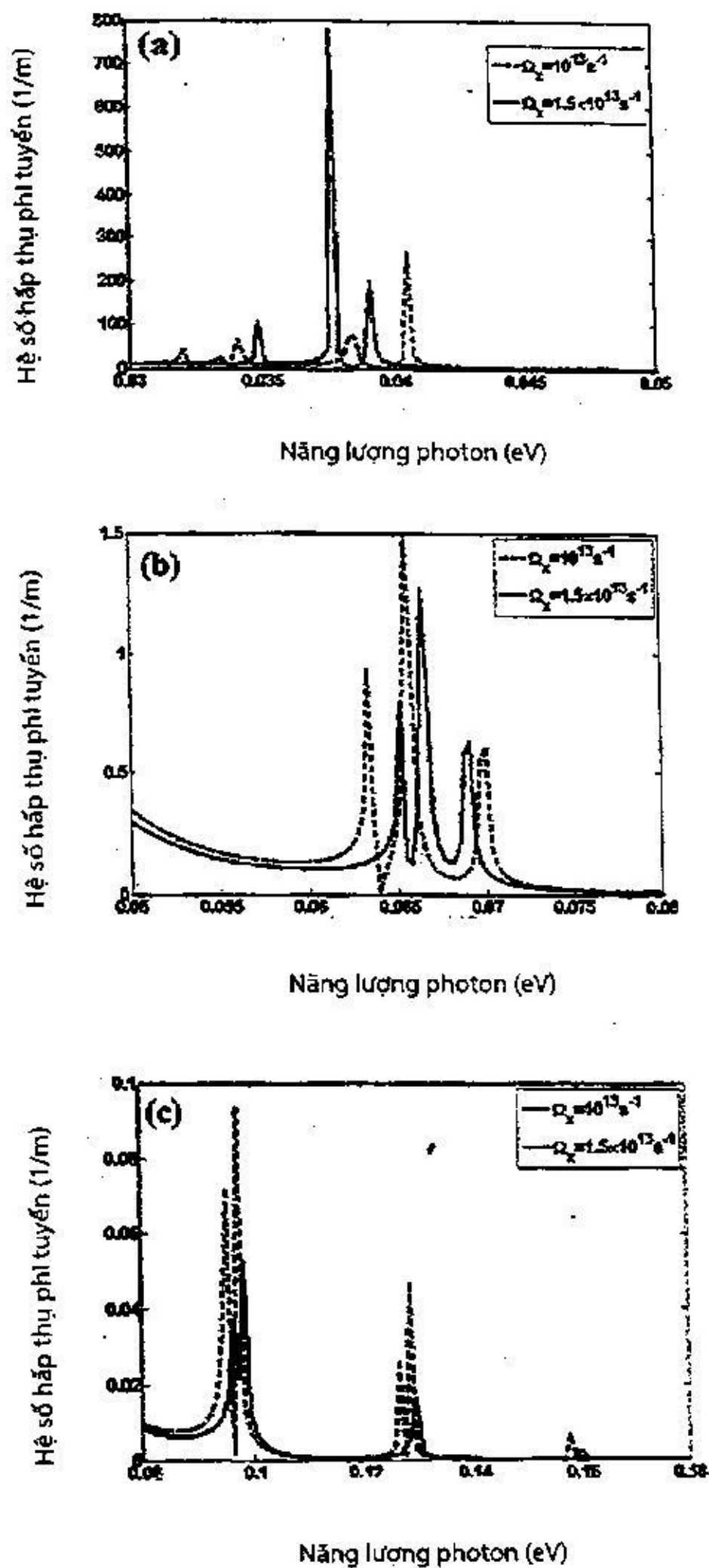
Đồ thị trên hình 3.20 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng cyclotron của từ trường tại các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hồ thế Ω_x . Ta có thể thấy rằng, tương tự như trong dây lượng tử hình trụ hồ thế cao vô hạn, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp này cũng xuất hiện các vạch hấp thụ tại các giá trị khác nhau của tần số cyclotron ω_c . Tuy nhiên các giá trị này phụ thuộc mạnh vào tần số hiệu dụng của hồ thế giam giữ điện tử, giá trị của tần số cyclotron ω_c mà tại đó có các vạch hấp thụ có thể dịch chuyển nếu thay đổi tần số hiệu dụng Ω_x của hồ thế.

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài, các kết quả khảo sát đối với hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ là:

Đồ thị trên hình 3.21 cho thấy phổ hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hồ thế parabol khi có mặt của từ trường ngoài là phổ vạch và gián đoạn theo từng nhóm vạch phổ tương ứng với sự chuyển mức Landau của năng lượng điện tử, điều này là phù hợp với kết quả nghiên cứu của tác giả G.B. Ibragimov [53] cho trường hợp hấp thụ tuyến tính. Hệ số hấp thụ phi tuyến cũng giảm nhanh khi tần số Ω của sóng điện từ càng tăng. Mặt khác, hình 3.21 cũng cho ta thấy sự phụ thuộc của phổ hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào tần số hiệu dụng Ω_x của hồ thế giam giữ điện tử. Khi thay đổi tần số Ω_x , độ rộng của các nhóm vạch phổ hấp thụ phi tuyến cũng thay đổi. Cụ thể như ta nhìn thấy ở hình 3.21, khi Ω_x tăng lên thì độ rộng của các nhóm vạch phổ hấp thụ giảm. Đây là kết quả hoàn toàn mới, chưa được công bố trong các nghiên cứu trước đây. Nó chỉ ra rằng thế giam cầm của điện tử có tác động lớn đến sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử.

Kết luận:

Nghiên cứu sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình trụ hồ thế parabol thu được các kết quả sau:



Hình 3.21: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon với các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hố thế $\Omega_x, \Omega_y = 2 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$. Các hình a, b, c tương ứng với các khoảng khác nhau của năng lượng photon.

Các phương trình động lượng từ cho điện tử và các biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol đã được tính toán và thiết lập. Bài toán cũng được xem xét cho cả hai cơ chế tán xạ điện tử-phonon. Sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol cũng đã được nghiên cứu cho cả hai trường hợp vắng mặt và có mặt của từ trường. Bên cạnh việc khảo sát sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm vào các tham số của trường ngoài như cường độ và tần số của sóng điện từ, tần số cyclotron của từ trường, nhiệt độ của hệ, chúng ta đã khảo sát sự ảnh hưởng của các tham số cấu trúc đặc trưng của dây lượng tử hình trụ hố thế parabol lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ.

Kết quả tính số cho trường hợp vắng mặt của từ trường cho thấy rằng về mặt định tính sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh vào nhiệt độ T của hệ, cường độ và tần số sóng điện từ trong dây lượng tử hình trụ hố thế parabol không đổi so với dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn. Tuy nhiên, về mặt định lượng hệ số hấp thụ phi tuyến có sự thay đổi vào phụ thuộc mạnh vào tần số hiệu dụng của hố thế giam giữ điện tử. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào bán kính dây cũng đã có sự thay đổi, khác với dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn, giá trị bán kính mà tại đó hệ số hấp thụ đạt giá trị cực đại không phụ thuộc vào các tham số bên ngoài cấu trúc như nhiệt độ, cường độ điện trường mà phụ thuộc vào tần số hiệu dụng của thế giam giữ điện tử. Với các giá trị khác nhau của tần số hiệu dụng của hố thế hệ số hấp thụ phi tuyến có sự thay đổi rất lớn về độ lớn.

Khi có sự tương tác với từ trường ngoài, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh cũng có sự thay đổi đáng kể. Phổ hấp thụ là phổ vạch và gián đoạn theo từng nhóm vạch tương ứng với sự dịch chuyển mỗi mức Landau, kết quả này là phù hợp với nghiên cứu của G.B. Ibragimov [53]. Tuy nhiên trong nghiên cứu này chúng ta chỉ ra rằng có sự phụ thuộc rất lớn của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh vào tần số hiệu dụng của hố thế. Độ rộng của các vạch phổ thay đổi khi ta thay đổi tần số hiệu dụng của hố thế giam giữ điện tử.

3.3. HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG DÂY LƯỢNG TỬ HÌNH CHỮ NHẬT HỔ THỂ CAO VÔ HẠN

Trong phần này chúng ta nghiên cứu hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hổ thể cao vô hạn [11].

3.3.1. Hamiltonian của hệ điện tử-phonon trong dây lượng tử hình chữ nhật hổ thể cao vô hạn

Chúng ta xét mô hình dây lượng tử chữ nhật với hổ thể giam giữ điện tử cao vô hạn. Hàm sóng và phổ năng lượng được xác định trong (1.46) và (1.48). Bỏ qua tương tác của các hạt cùng loại, Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong dây lượng tử hình chữ nhật hổ thể cao vô hạn được viết như sau:

$$H = \sum_{n,l,\bar{p}} \epsilon_{n,l} (\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) a_{n,l,\bar{p}}^+ a_{n,l,\bar{p}} + \sum_{\bar{q}} \omega_{\bar{q}} b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} + \sum_{n,l,n',l',\bar{p},\bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n,l,n',l'}(\bar{q}) a_{n,l,\bar{p}+\bar{q}}^+ a_{n',l',\bar{p}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+), \quad (3.108)$$

trong đó L_x và L_y là kích thước của dây theo hai chiều bị giới hạn, $a_{n,l,\bar{p}}^+ (a_{n,l,\bar{p}})$ là toán tử sinh (huỷ) của một electron trong dây lượng tử, $b_{\bar{q}}^+ (b_{\bar{q}})$ là toán tử sinh (huỷ) một phonon ở trạng thái có vector sóng $\bar{q}$, $\omega_{\bar{q}}$ là tần số của phonon, $I_{n,l,n',l'}(\bar{q})$ là thừa số dạng được xác định như sau:

$$I_{n,l,n',l'}(\bar{q}) = \frac{32\pi^4 (q_x L_x n n')^2 (1 - (-1)^{n+n'} \cos(q_x L_x))}{[(q_x L_x)^4 - 2\pi^2 (q_x L_x)^2 (n^2 + n'^2) + \pi^4 (n^2 - n'^2)^2]^2} \times \frac{32\pi^4 (q_y L_y l l')^2 (1 - (-1)^{l+l'} \cos(q_y L_y))}{[(q_y L_y)^4 - 2\pi^2 (q_y L_y)^2 (l^2 + l'^2) + \pi^4 (l^2 - l'^2)^2]^2} \quad (3.109)$$

Sau đây, chúng ta xem xét dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn đặt trong một từ trường ngoài, để đơn giản chúng ta chọn một từ trường đều yếu đặt song song với trục của dây. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong dây lượng tử khi có mặt của từ trường được viết như sau:

$$H = \sum_{\gamma, \bar{p}} \varepsilon_{\gamma}^H \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t) \right) a_{\gamma, \bar{p}}^+ a_{\gamma, \bar{p}} + \sum_{\bar{q}} \omega_{\bar{q}} b_{\bar{q}}^+ b_{\bar{q}} + \sum_{\gamma, \gamma', \bar{p}, \bar{q}} C_{\bar{q}} I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q}) J_{N, N'}(u) a_{\gamma, \bar{p} + \bar{q}}^+ a_{\gamma, \bar{p}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+), \quad (3.110)$$

trong đó γ và γ' lần lượt là các bộ số lượng tử (N, n, ℓ) và (N', n', ℓ') của điện tử dưới tác dụng của từ trường ngoài, N, N' là các chỉ số vùng Landau ($N = 0, 1, 2, \dots$), $\varepsilon_{n, \ell}^H \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t) \right)$ là phổ năng lượng của điện tử dưới tác dụng của sóng điện từ với thế vector $\bar{A}(t)$ khi có mặt của từ trường được viết như sau:

$$\varepsilon_{n, \ell}^H \left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t) \right) = \frac{\left(\bar{p} - \frac{e}{c} \bar{A}(t) \right)^2}{2m} + \omega_c \left(N + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2}{L_y^2} \right),$$

trong đó ω_c là tần số cyclotron; $a_{\gamma, \bar{p}}^+$ ($a_{\gamma, \bar{p}}$) là toán tử sinh (huỷ) của một electron trong dây lượng tử khi có mặt từ trường ngoài; $b_{\bar{q}}^+$ ($b_{\bar{q}}$) là toán tử sinh (huỷ) một phonon ở trạng thái có vector sóng $\bar{q}$, $\omega_{\bar{q}}$ là tần số của phonon; $C_{\bar{q}}$ là hệ số tương tác điện tử-phonon; $I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})$ là thừa số dạng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử trong dây lượng tử; $J_{N, N'}(u)$ là tích phân được xác định như sau:

$$J_{N, N'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \phi_{N'}(r_{\perp} - a_c^2(p_z - q_z)) e^{iq_z r_z} \phi_N(r_{\perp} - a_c^2 p_z) \quad (3.111)$$

ở đây $u = a_c q_z^2 / 2$, $r_{\perp}$ và $a_c = c / eB$ lần lượt là vị trí và bán kính quỹ đạo cyclotron.

3.3.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn

Để thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn, chúng ta bắt đầu từ phương trình động lượng tử cho toán tử số hạt điện tử trong dây lượng tử $n_{n,\ell,\bar{p}}(t) = \langle a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}} \rangle_t$ ta có:

$$i \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = \langle [a_{n,\ell,\bar{p}}^+ a_{n,\ell,\bar{p}}, H] \rangle_t \quad (3.112)$$

Thực hiện các tính toán tương tự như phần trên, chúng ta nhận được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n,\ell,\bar{p}}(t)}{\partial t} = & \sum_{n',\ell',\bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,\ell'}(\bar{q})|^2 \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\ & \times \exp\{-i(k-s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{ [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t') N_{\bar{q}} - n_{n,\ell,\bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\ & \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{2m} + \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2}) - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\ & + [n_{n',\ell',\bar{p}-\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n,\ell,\bar{p}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\ & \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{2m} + \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2}) + \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\ & + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t') N_{\bar{q}} - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\ & \times \exp[i(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}) - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\ & + [n_{n,\ell,\bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\ & \times \exp[i(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}) + \omega_{\bar{q}})(t - t')] \} dt' \quad (3.113) \end{aligned}$$

Khi có mặt từ trường ngoài, tính toán tương tự như trên, chúng ta nhận được phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{\gamma, \bar{k}}(t)}{\partial t} = & \sum_{\gamma, \bar{q}} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k, s=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_s\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) \times \\
 & \times \exp\{-i(k-s)\Omega\} \int_{-\infty}^t \{[n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t') N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{2m} + \omega_c(N - N') + \frac{\pi^2}{2m}(\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2}) - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}-\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{2m} + \omega_c(N - N') + \frac{\pi^2}{2m}(\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2}) + \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}}(t') N_{\bar{q}} - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t') (N_{\bar{q}} + 1)] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_c(N' - N) + \frac{\pi^2}{2m}(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}) - \omega_{\bar{q}})(t - t')] + \\
 & + [n_{\gamma, \bar{p}}(t') (N_{\bar{q}} + 1) - n_{\gamma, \bar{p}+\bar{q}}(t') N_{\bar{q}}] \times \\
 & \times \exp[i(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_c(N' - N) + \frac{\pi^2}{2m}(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}) + \omega_{\bar{q}})(t - t')]\} dt'
 \end{aligned}
 \tag{3.114}$$

3.3.3. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn

Từ (3.113), để giải phương trình động lượng tử này ta sử dụng phương pháp xấp xỉ gần đúng như sau:

$$n_{n, \ell, \bar{p}}(t') \approx \bar{n}_{n, \ell, \bar{p}}, \quad n_{n, \ell, \bar{p}+\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{n, \ell, \bar{p}+\bar{q}}, \quad n_{n, \ell, \bar{p}-\bar{q}}(t') \approx \bar{n}_{n, \ell, \bar{p}-\bar{q}},$$

ở đây $\bar{n}_{n, \ell, \bar{p}}$ là hàm phân bố không phụ thuộc thời gian của điện tử. Hàm phân bố không cân bằng thu được từ việc giải gần đúng xấp xỉ phương trình động lượng tử (3.113):

$$\begin{aligned}
n_{n,\ell,\bar{p}}(t) = & - \sum_{\bar{q},n',\ell'} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_{k+l}\left(\frac{e\bar{E}_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \frac{1}{l\Omega} e^{-il\Omega t} \\
& \times \left\{ - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}} N_{\bar{q}}}{((\bar{p}+\bar{q})^2 - \bar{p}^2)/2m + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right. \\
& - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1)}{((\bar{p}+\bar{q})^2 - \bar{p}^2)/2m + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \\
& + \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}} N_{\bar{q}}}{(\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2)/2m + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2} \right) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \\
& \left. + \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{\bar{q}}+1)}{(\bar{p}^2 - (\bar{p}-\bar{q})^2)/2m + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2} \right) - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right\}, \quad (3.115)
\end{aligned}$$

Sử dụng biểu thức của hàm phân bố điện tử trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn (3.115), thực hiện các tính toán tương tự chương 2, biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn cho cả hai trường hợp tán xạ điện tử-phonon thu được:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{8\pi^2\Omega}{c\sqrt{\chi_\infty}E_0^2} \sum_{n,\ell,n',\ell'} |I_{n,\ell,n',\ell'}(\bar{q})|^2 (\bar{q}) \sum_{\bar{q},\bar{p}} |C_{\bar{q}}|^2 N_{\bar{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}] \times \\
& \times k J_k^2\left(\frac{eE_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \left\{ [\delta((\bar{q}^2 + 2\bar{p}\bar{q})/2m + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega)] \right. \\
& \left. + [\omega_{\bar{q}} \rightarrow -\omega_{\bar{q}}] \right\}, \quad (3.116)
\end{aligned}$$

a) Trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang

Đối với trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang, hằng số tương tác $C_{\vec{q}}$ được xác định theo (2.35), tần số phonon $\omega_{\vec{q}} \equiv \omega_0$ là tần số phonon quang. Trong trường hợp này ta cũng xét ở hai giới hạn: hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Để có được sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ ở gần ngưỡng, điều kiện $|k\Omega - \omega_0| \ll \bar{\epsilon}$ phải được thỏa mãn. Biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn, trường hợp hấp thụ gần ngưỡng thu được:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\pi} e^4 n_0^* (k_b T)^{3/2}}{4c\epsilon_0 \sqrt{m\chi_\infty} \Omega^3 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \{ [\exp\{\frac{1}{k_b T} B_1\}] \times \\ \times [\exp\{\frac{1}{k_b T} (\omega_0 - \Omega)\} - 1] [1 + \frac{3e^2 E_0^2 k_b T}{8m\Omega^4} (1 + \frac{B_1}{2k_b T})] + [\omega_0 \rightarrow -\omega_0] \}, \quad (3.117)$$

$$\text{trong đó } B_1 = \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_0 - \Omega.$$

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trong trường hợp này, hấp thụ phi tuyến sóng điện từ xảy ra khi điều kiện $|k\Omega - \omega_0| \gg \bar{\epsilon}$ được thỏa mãn, biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn trong trường hợp hấp thụ xa ngưỡng thu được:

$$\alpha = \frac{\pi^2 e^4 k_b T n_0}{c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 m \epsilon_0 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \\ \times \left\{ \left[\left[1 + \frac{3e^2 E_0^2}{16m\Omega^4} \left(\frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_0 - \Omega \right) \right] \right. \right.$$

$$[1 - \exp[\frac{-1}{k_b T} (\frac{\pi^2}{2m} (\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2}{L_y^2}) + \omega_o - \Omega)]] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o]\}. \quad (3.118)$$

b) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm

Trong trường hợp này ω_q là tần số của phonon âm, vì $\omega_q \ll \Omega$ nên trong biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến (3.116) ta có thể bỏ qua số hạng ω_q . Hệ số tương tác điện tử-phonon âm được xác định theo (2.4). Tương tự như với dây lượng tử hình trụ hố thế cao vô hạn, biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn cho trường hợp tán xạ điện tử -phonon âm thu được như sau:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m\pi} e^2 n_0^* \xi^2 (k_b T)^{5/2}}{4c \sqrt{\chi_\infty} \rho v_s^2 \Omega^3 V} \sum_{n, \ell, n', \ell'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 [1 - \exp\{\frac{\Omega}{k_b T}\}] \times \\ \times \exp\{\frac{1}{2k_b T} D_1\} \frac{D_1}{2k_b T} [1 + \frac{3e^2 E_0^2 (k_b T)^2}{4m\Omega^4 D_1} (\frac{D_1^2}{4(k_b T)^2} + \frac{3D_1}{4k_b T} + 3)], \quad (3.119)$$

trong đó $D_1 = \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}) - \Omega$.

Bằng phương pháp phương trình động lượng tử cho điện tử, các biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn trong trường hợp vắng mặt của từ trường đã được xác định trong các biểu thức (3.117), (3.118) và (3.119) tương ứng với hấp thụ xa ngưỡng, gần ngưỡng trong tán xạ điện tử - phonon quang và hấp thụ gần ngưỡng của trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm. Các biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến này sẽ được tính số để nhận thấy rõ dạng phụ thuộc của nó vào các tham số như nhiệt độ của hệ, cường độ và tần số của sóng điện từ, đặc biệt là sự phụ thuộc vào tham số đặc trưng L_x và L_y của dây lượng tử hình chữ nhật để xem xét ảnh hưởng của hình dạng và kích thước dây lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ.

Trong trường hợp có từ trường ngoài, một cách tương tự, bằng việc sử dụng phương pháp xấp xỉ gần đúng, giải phương trình động lượng tử (3.114), hàm phân bố của điện tử $n_{\gamma, \bar{p}}(t)$ trong dây lượng tử hình chữ nhật khi có mặt của từ trường thu được:

$$\begin{aligned}
 n_{\gamma, \bar{p}}(t) = & - \sum_{\bar{q}, \gamma'} |C_{\bar{q}}|^2 |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) J_{k+l}\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) \\
 & \times \frac{1}{i\Omega} \left\{ \frac{\bar{n}_{n, \ell, \bar{p}-\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{\gamma, \bar{p}} N_{\bar{q}}}{\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{2m} + \omega_c(N - N') + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2} \right) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \right. \\
 & + \frac{\bar{n}_{n, \ell, \bar{p}-\bar{q}} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{\gamma, \bar{p}}(N_{\bar{q}}+1)}{\frac{\bar{p}^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2}{2m} + \omega_c(N - N') + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2 - n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2 - \ell'^2}{L_y^2} \right) - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \\
 & - \frac{\bar{n}_{\gamma, \bar{p}}(N_{\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n, \ell, \bar{p}+\bar{q}} N_{\bar{q}}}{\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_c(N' - N) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} + \\
 & \left. - \frac{\bar{n}_{\gamma, \bar{p}} N_{\bar{q}} - \bar{n}_{n, \ell, \bar{p}+\bar{q}}(N_{\bar{q}}+1)}{\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_c(N' - N) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) - \omega_{\bar{q}} - k\Omega + i\delta} \right\} e^{-i\Omega t},
 \end{aligned}
 \tag{3.120}$$

Sử dụng biểu thức tính mật độ dòng hạt tải và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử ta thu được biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài như sau:

$$\begin{aligned}
 \alpha = & \frac{8\pi^2 \Omega}{c\sqrt{\chi_{\infty}} E_0^2} \sum_{\gamma, \gamma'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\bar{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \sum_{\bar{q}, \bar{p}} |C_{\bar{q}}|^2 N_{\bar{q}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\bar{n}_{\gamma, \bar{p}} - \bar{n}_{\gamma', \bar{p}+\bar{q}}] \\
 & \times k J_k^2\left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m\Omega^2}\right) \left\{ \left[\delta \left(\frac{(\bar{p} + \bar{q})^2 - \bar{p}^2}{2m} + \omega_c(N' - N) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \omega_{\bar{q}} - k\Omega \right) \right] + [\omega_{\bar{q}} \rightarrow -\omega_{\bar{q}}] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{3.121}$$

Xét cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang, $\omega_{\vec{q}} \equiv \omega_o$. Hệ số tương tác điện tử - phonon quang được cho bởi (2.3). Biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến được viết lại cho trường hợp tán xạ điện tử phonon quang:

$$\alpha = \frac{16\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma', \vec{q}, \vec{p}} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 |J_{N, N'}(u)|^2 [\bar{n}_{\gamma, \vec{p}} - \bar{n}_{\gamma', \vec{p} + \vec{q}}] \\ \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2} k J_k^2 \left(\frac{e E_0 \vec{q}}{m \Omega^2} \right) \left\{ \left[\delta \left(\frac{(\vec{p} + \vec{q})^2 - \vec{p}^2}{2m} + \omega_c (N' - N) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_o - k\Omega \right) \right] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \right\}, \quad (3.122)$$

Xét trường hợp điện tử không suy biến, sử dụng công thức chuyển tổng thành tích phân, hạn chế gần đúng bậc hai của hàm Bessel ta thu được

$$\alpha = \frac{e^2 \Omega k_B T n_0 m \omega_c}{c \sqrt{\chi_\infty} \epsilon_0 E_0^2 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \left(\frac{e \vec{E}_0}{2m\Omega^2} \right)^2 \sum_{\gamma, \gamma'} |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \times \\ \times \left[\exp \left(-\frac{1}{k_B T} \left(\omega_c (N + 1/2) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2}{L_y^2} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \left(\omega_c (N' + 1/2) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2}{L_y^2} \right) \right) \right) \right] \times \\ \times \left\{ \left[\delta \left(\omega_c (N' - N) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) + \omega_o - k\Omega \right) \right] + \right. \\ \left. + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \right\} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dq_\perp^2 |J_{N, N'}(u)|^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{e \vec{E}_0}{2m\Omega^2} \right)^2 q^2 \right) \quad (3.123)$$

Sử dụng công thức (3.111) và tính trực giao của hàm Laguerre suy rộng, chúng ta thu được:

$$\alpha = \frac{\pi e^4 n_0 \omega_c K_B T}{2c \sqrt{\chi_\infty} \epsilon_0 m a_c^2 \Omega^3 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\gamma, \gamma'} \left(1 + \frac{3e^2}{8m^2 a_c^2 \Omega^4} E_0^2 \right) |I_{n, \ell, n', \ell'}(\vec{q})|^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\exp\left(\frac{-1}{k_B T} \left(\omega_c (N + 1/2) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2}{L_y^2} \right) \right) \right) + \right. \\
& \left. - \exp\left(\frac{-1}{k_B T} \left(\omega_c (N' + 1/2) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2}{L_y^2} \right) \right) \right) \right] \times \\
& \times \{ [\delta(\omega_c (N' - N) + \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}) + \omega_o - k\Omega)] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \} \\
& \hspace{15em} (3.124)
\end{aligned}$$

Khai triển hàm Delta-Dirac $\delta(x)$ trong (3.124) theo [54] và thực hiện tính toán chúng ta thu được biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn khi có mặt của từ trường ngoài với tán xạ điện tử - phonon quang như sau:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{e^4 n_0^* \omega_c k_B T}{2 \epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} m a_c^2 \Omega^3 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\vec{n}} |I_{n,l,n,l}|^2 \left[1 + \frac{3e^2 E_0^2}{8a_c^2 m^2 \Omega^4} \right] \times \\
& \times \left[\exp\left\{ \frac{-1}{k_B T} \left[\omega_c (N + 1/2) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{\ell^2}{L_y^2} \right) \right] \right\} + \right. \\
& \left. - \exp\left\{ \frac{-1}{k_B T} \left[\omega_c (N' + 1/2) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2}{L_y^2} \right) \right] \right\} \right] \times \\
& \times \left\{ \left[\frac{\sqrt{A|M|}}{M(\Omega - \omega_o + M\omega_c + \frac{\pi^2}{2m} (\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2}))^2 + A} \right] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \right\}. \hspace{1em} (3.125)
\end{aligned}$$

Trong đó, $M = N' - N$, là hiệu chỉ số hai mức phân vùng từ Landau

$$A = N_0 \frac{|C_0|^2}{4\pi^2} \sum_{\vec{q}} |I_{n,l,n,l}|^2 \text{ với } N_0 = k_B T / \omega$$

3.3.4. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

Trong phần này, các biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật được tính số cho dây $GaAs / GaAsAl$. Các số liệu tính số được cho ở bảng 3.2.

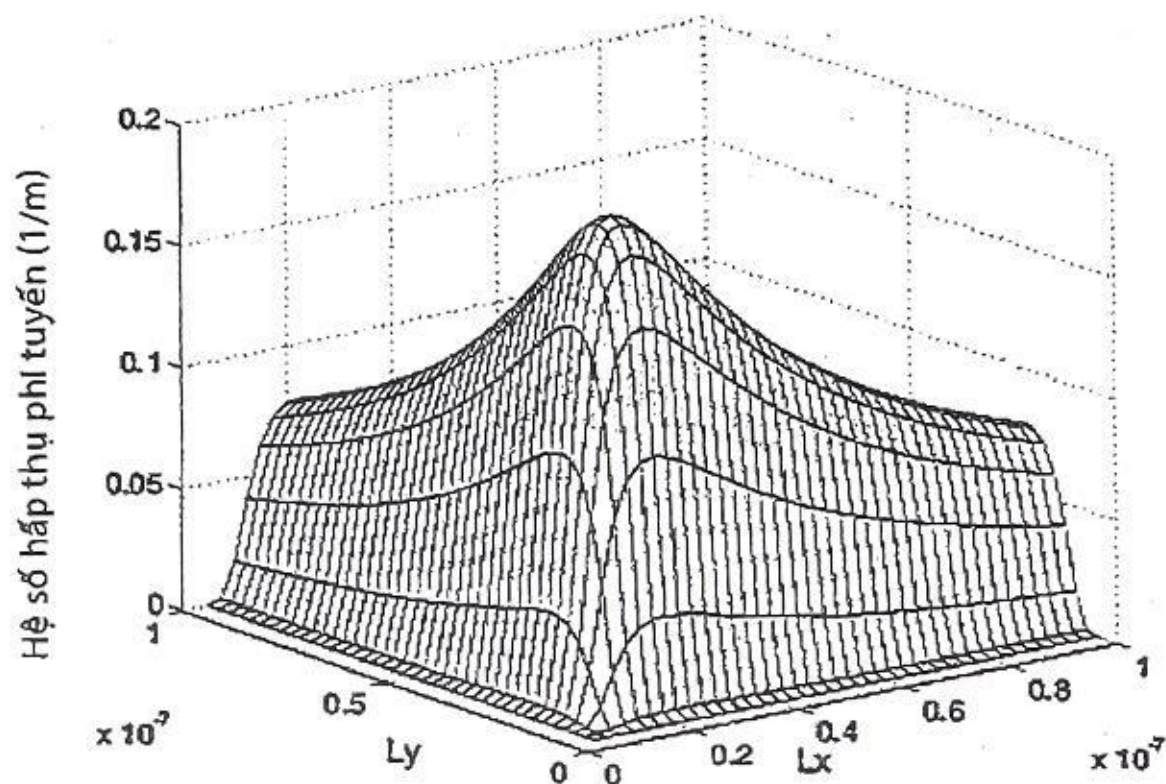
Bảng 3.2: Các thông số cơ bản của dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn

Tham số	Ký hiệu	Giá trị
Khối lượng hiệu dụng của electron	m_e	$6.006 \times 10^{-34} \text{ kg}$
Vận tốc sóng âm	v_s	5220 m/s
Mật độ tinh thể	ρ	$5.3 \times 10^3 \text{ kg / m}^3$
Hằng số biến dạng	ξ	$2.2 \times 10^{-18} \text{ J}$
Hằng số Boltzmann	k_b	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Hằng số điện môi	ϵ	12.5
Độ thấm điện môi cao tần	χ_∞	10.8
Độ thấm điện môi tĩnh	χ_0	13.1
Vecto sóng của phonon	$q_x = q_y$	$2 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$

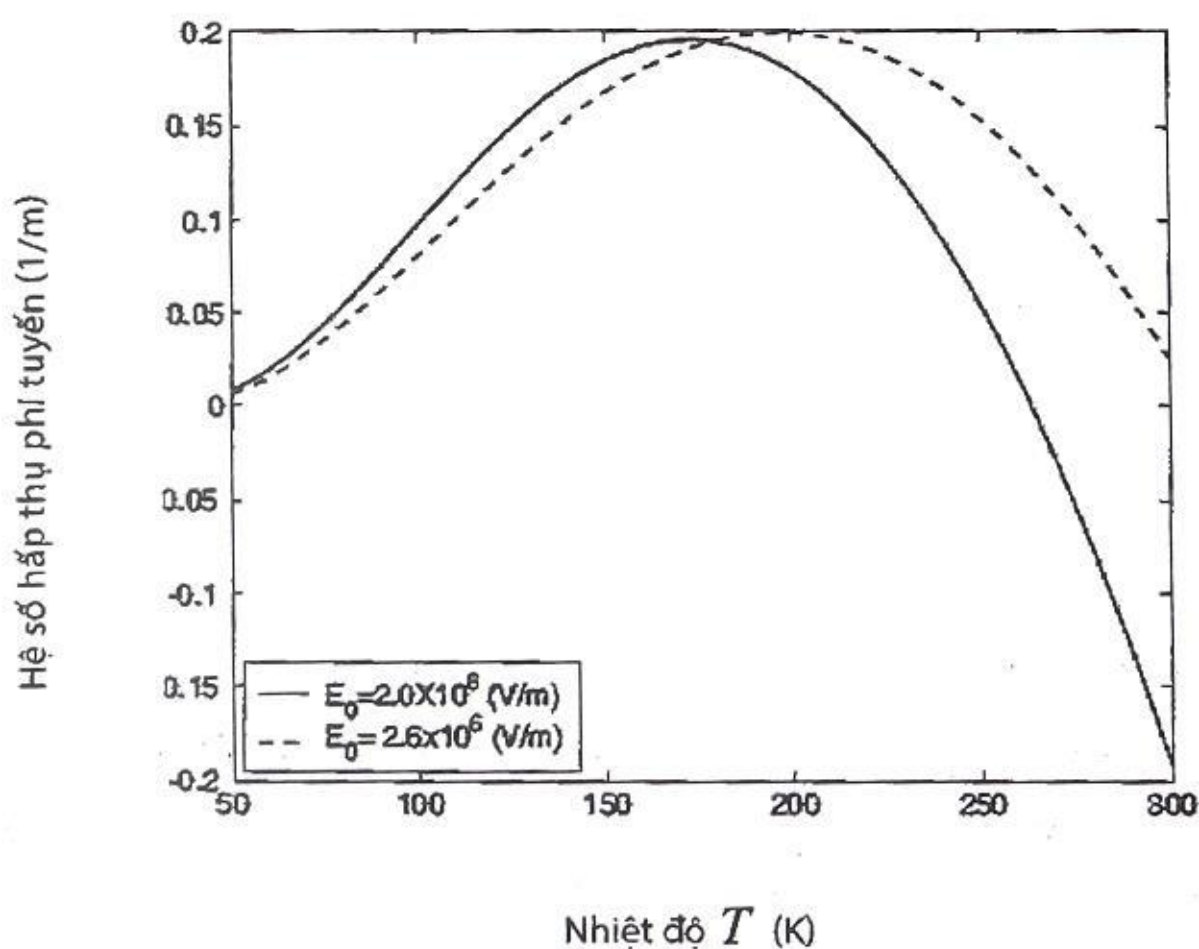
Các kết quả khảo sát hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trường hợp vắng mặt từ trường ngoài với các cơ chế tán xạ khác nhau được trình bày sau đây:

a) Trường hợp tán xạ điện tử phonon âm

Đồ thị trên hình 3.22 cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào kích thước dây L_x , L_y . Cũng như dây lượng tử hình trụ, hệ số hấp thụ phi tuyến phụ thuộc phi tuyến vào kích thước giới hạn L_x , L_y của dây lượng tử hình chữ nhật. Giá trị của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tăng lên khi giảm kích thước của dây, đến một giá trị xác định, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đạt giá trị cực đại rồi giảm dần khi kích thước của dây tiếp tục giảm. Tuy nhiên, khác với dây lượng tử hình trụ, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật không nhận giá trị âm.



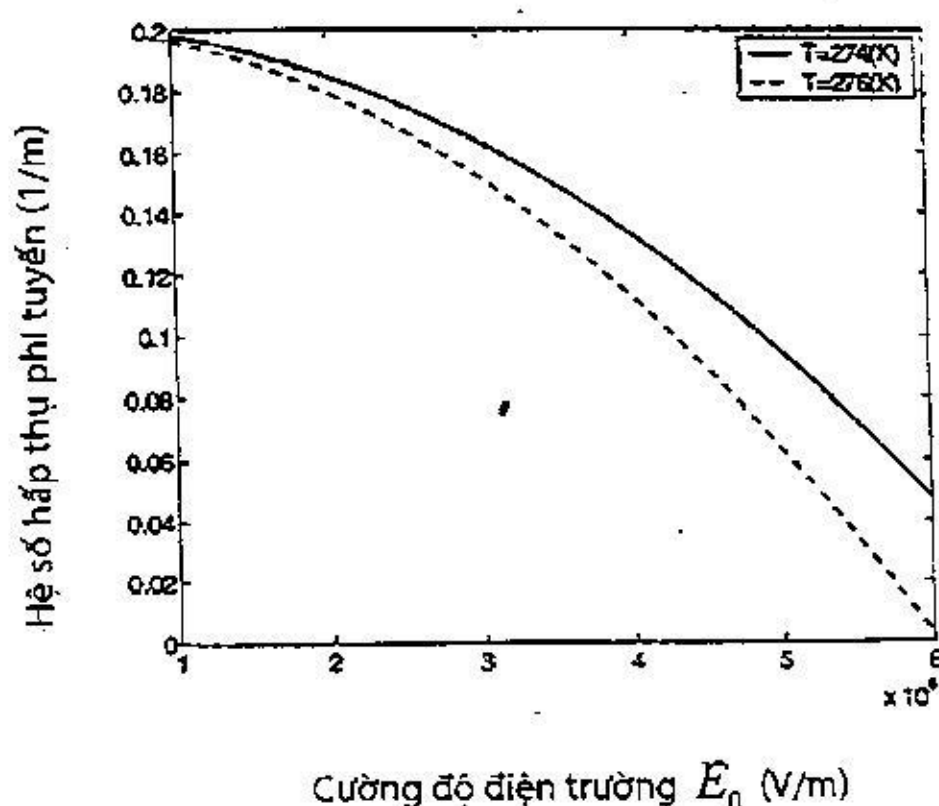
Hình 3.22: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào kích thước dây L_x, L_y



Hình 3.23: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ T của hệ tại các giá trị khác nhau của cường độ điện trường, trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm.

Đồ thị trên hình 3.23 cho thấy sự phụ thuộc mạnh và phi tuyến của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ T của hệ với các giá trị khác nhau của cường độ điện trường E_0 . Nó cũng cho thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ α trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn đạt giá trị cực đại tại các giá trị khác nhau của nhiệt độ, giá trị này phụ thuộc vào các tham số khác của hệ, cụ thể là cường độ của sóng điện từ. Ví dụ: tại $E_0 = 2 \times 10^6 \text{ V/m}$ và $E_0 = 2,6 \times 10^6 \text{ V/m}$, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ có được giá trị cực đại khi nhiệt độ lần lượt là $T \sim 175 \text{ K}$ và 200 K .

Đồ thị trên hình 3.24 cho thấy rằng hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm phụ thuộc phi tuyến vào cường độ E_0 của sóng điện từ. Cũng giống như trong dây lượng tử hình trụ, hệ số hấp thụ giảm khi cường độ sóng điện từ tăng lên.

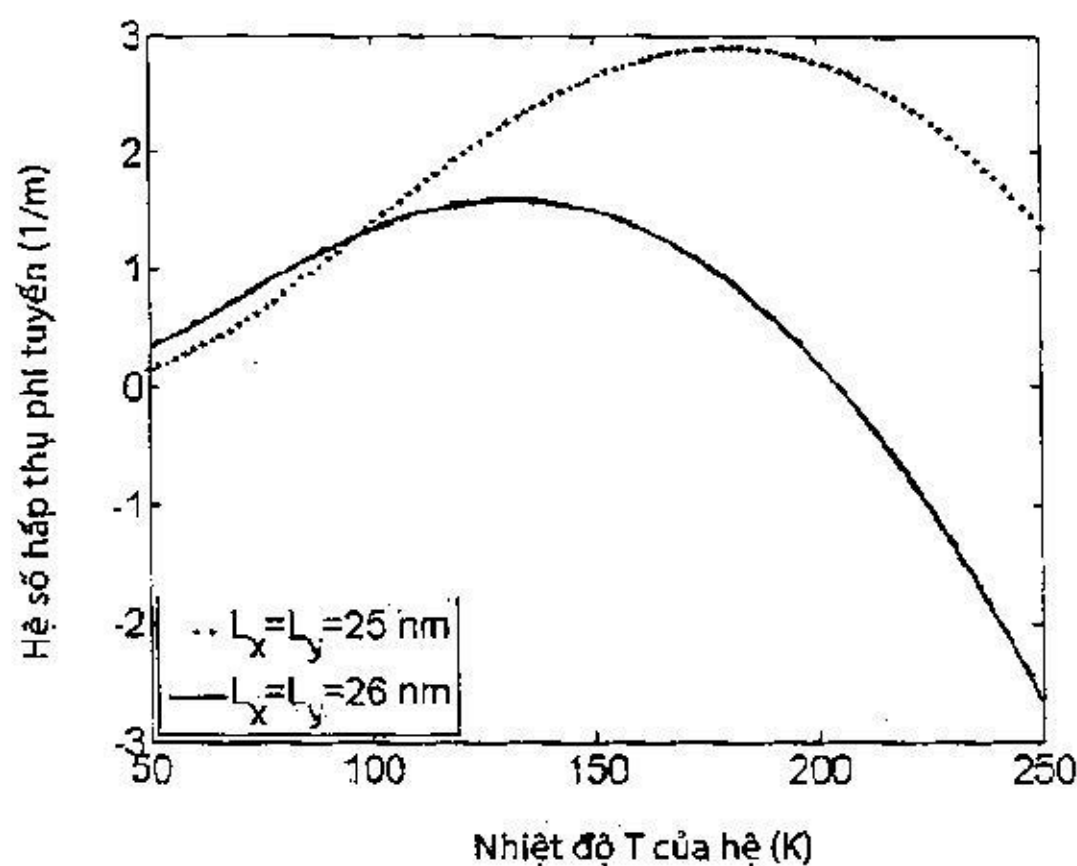


Hình 3.24: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn vào cường độ điện trường E_0 tại các giá trị khác nhau của nhiệt độ T của hệ.

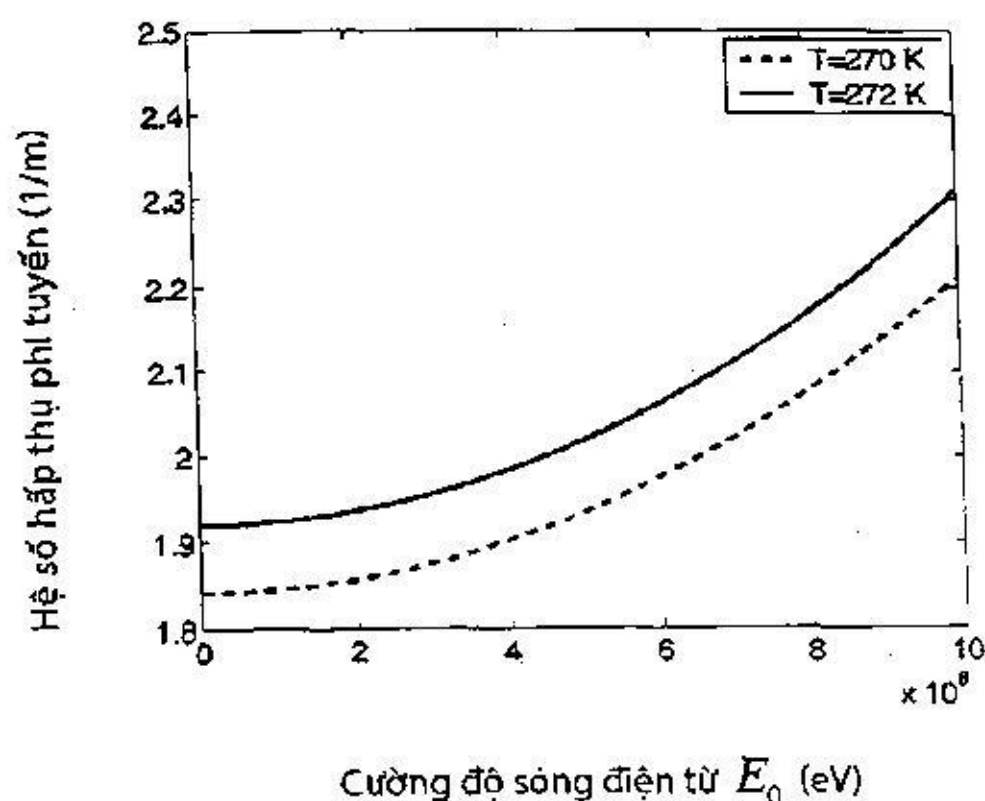
b) Trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang

Đồ thị trên hình 3.25 cho thấy, tương tự như trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ tăng lên khi nhiệt

độ của hệ tăng, đến khi đạt giá trị cực đại hệ số hấp thụ lại giảm xuống nếu tiếp tục tăng nhiệt độ. Tương tự như trong dây lượng tử hình trụ, nhiệt độ mà tại đó hệ số hấp thụ đạt giá trị cực đại phụ thuộc vào kích thước dây. Khi kích thước L_x, L_y thay đổi, đỉnh hấp thụ thay đổi cả về độ lớn lẫn vị trí của nó trên thang nhiệt độ. Tuy nhiên, ở đây có một sự khác biệt so với dây lượng tử hình trụ, sự thay đổi kích thước dây lượng tử hình chữ nhật làm biến đổi rất mạnh đỉnh hấp thụ. Ví dụ: khi $L_y = L_x = 26nm$, hệ số hấp thụ đạt giá trị cực đại $\alpha_{max} = 1,6m^{-1}$ tại nhiệt độ $T = 135K$, thay đổi kích thước của dây giảm một lượng $\Delta L_y = \Delta L_x = 1nm$ ($L_y = L_x = 25nm$), giá trị và vị trí của hệ số hấp thụ trên thang nhiệt độ tăng, $\alpha_{max} = 2,9m^{-1}$ tại nhiệt độ $T = 180K$ ($\Delta T = 45K$). Trong khi đó, với dây lượng tử hình trụ, khi bán kính của dây cũng thay đổi một lượng tương đối lớn $\Delta R = 1nm$ nhưng vị trí của nó trên thang nhiệt độ chỉ biến đổi một lượng $\Delta T = 15K$. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp này cũng lớn hơn so với trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm.

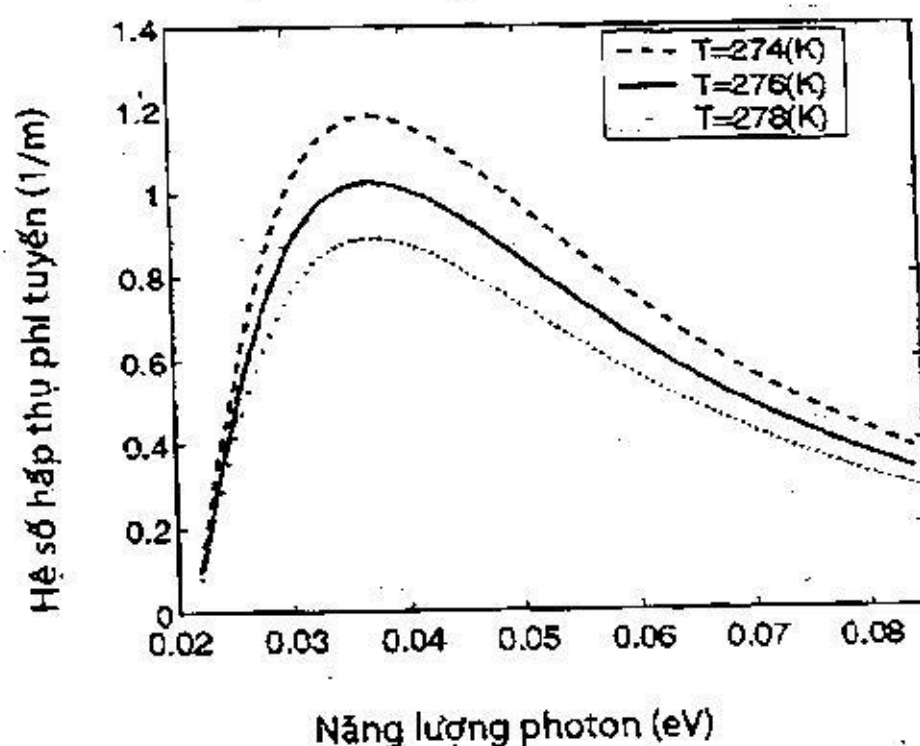


Hình 3.25: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ của hệ tại các giá trị khác nhau của kích thước dây lượng tử hình chữ nhật cho trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang.



Hình 3.26: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào cường độ sóng điện từ E_0

Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào cường độ sóng điện từ E_0 trong trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang có sự khác biệt rõ rệt so với trường hợp tán xạ điện tử-phonon âm (hình 3.26). Hệ số hấp thụ phi tuyến tăng lên khi cường độ điện trường tăng. Điều này là phù hợp với hai loại dây lượng tử đã xét ở chương 2 và chương 3. Hệ số hấp thụ phi tuyến trong trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang lớn hơn nhiều so với trường hợp tán xạ điện tử - phonon âm.



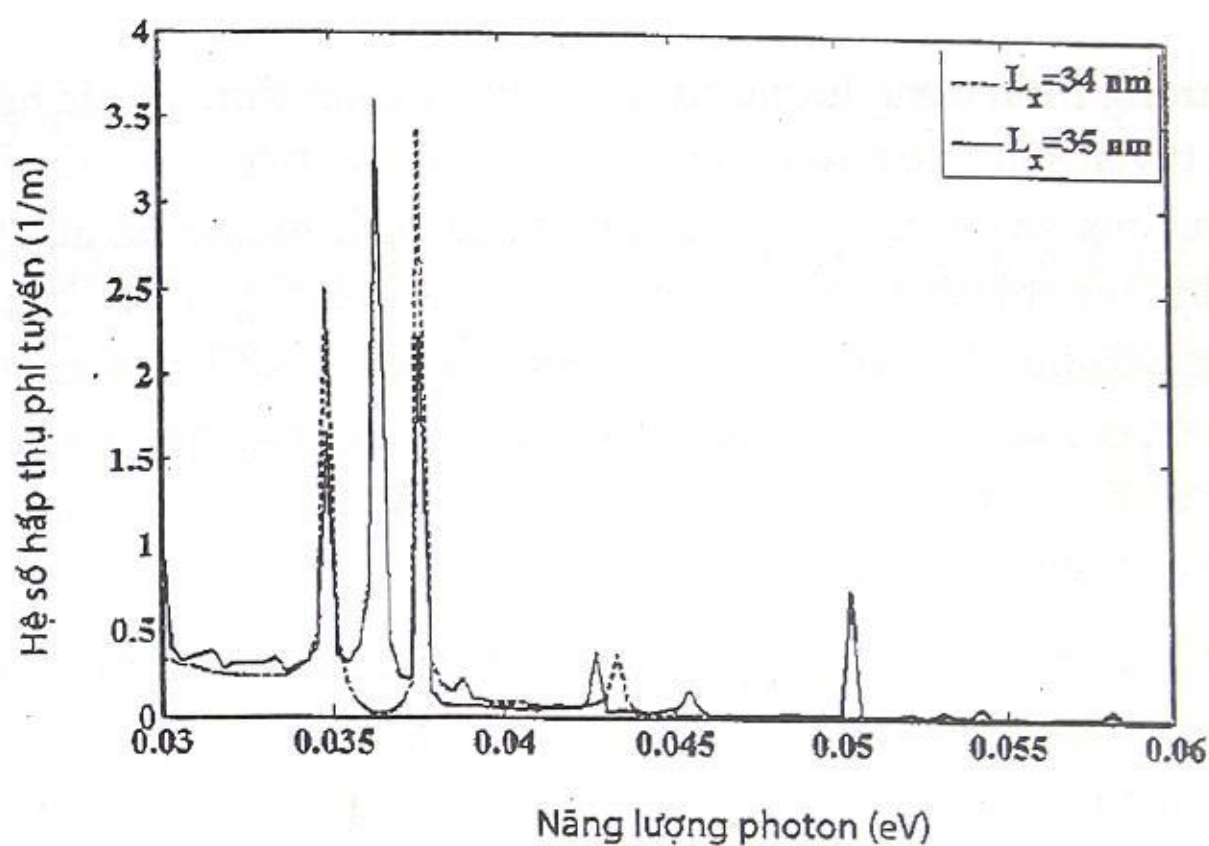
Hình 3.27: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon

Đồ thị trên hình 3.27 cho thấy rằng, giống như các dây lượng tử đã xét ở hai chương trước, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon trong dây lượng tử hình chữ nhật cũng đạt đỉnh hấp thụ khi tần số sóng điện từ bằng với tần số của phonon quang. Điều này cho thấy sự khác nhau về hình dạng dây lượng tử không làm thay đổi giá trị tần số sóng điện từ mà tại đó hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đạt cực đại. Sự hấp thụ sẽ lớn nhất khi $\Omega = \omega_0$.

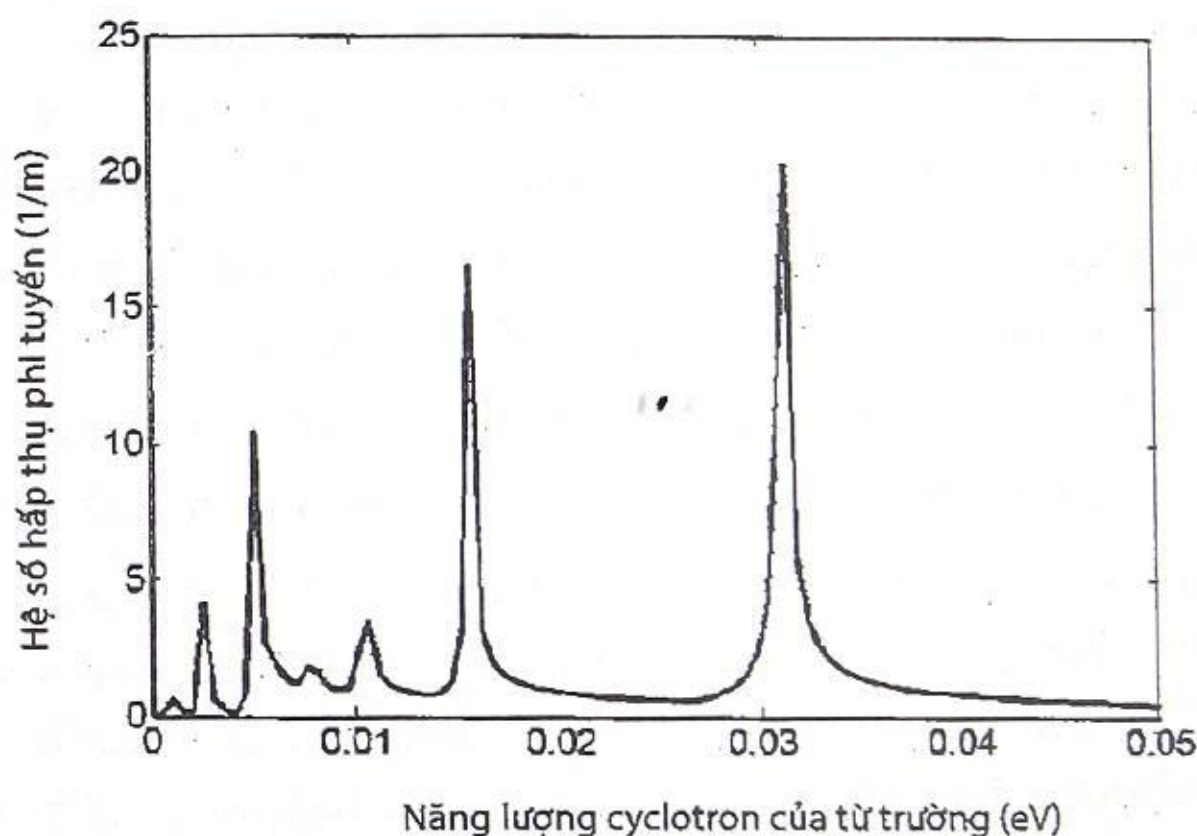
Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài và cơ chế tán xạ điện từ - phonon quang, các kết quả khảo sát hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ là:

Khi có mặt của từ trường, sự hấp thụ sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật cũng đã thay đổi đáng kể. Đồ thị trên hình 3.28 cho thấy phổ hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật là phổ vạch. Các vạch hấp thụ xảy ra tại các giá trị khác nhau của năng lượng photon, tương ứng với các giá trị khác nhau của tần số sóng điện từ. Có thể nói sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ khi có mặt của từ trường trong dây lượng tử có sự lọc lựa thỏa mãn điều kiện $\omega_c(N' - N) + \frac{\pi^2}{2m} \left(\frac{n'^2 - n^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2 - \ell^2}{L_y^2} \right) \pm \omega_0 - k\Omega$. Phổ hấp thụ phi tuyến sóng điện từ cũng phụ thuộc vào kích thước giới hạn L_x và L_y của dây lượng tử. Phổ hấp thụ sóng phi tuyến sóng điện từ dịch chuyển khi thay đổi kích thước dây.

Đồ thị trên hình 3.29 thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật vào năng lượng cyclotron. Nó cho thấy hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ chịu sự tác động rất lớn của tần số cyclotron của từ trường. Sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ chỉ xảy ra đáng kể tại các tần số cyclotron xác định và gián đoạn, nó tương ứng với các chỉ số mức Landau mà điện tử dịch chuyển đến sau khi hấp thụ, chỉ số này phải được xác định.



Hình 3.28: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng photon khi có mặt của từ trường trong dây lượng tử hình chữ nhật.



Hình 3.29: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng cyclotron của từ trường trong dây lượng tử hình chữ nhật.

Kết luận:

Nghiên cứu sự hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn thu được kết quả sau:

Phương trình động lượng từ cho điện tử giam cầm và các hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đã được tính toán giải tích cho cả hai trường hợp vắng mặt và có mặt của từ trường ngoài. Các biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ cho thấy sự phụ thuộc của nó vào các tham số như nhiệt độ của hệ, cường độ và tần số của sóng điện từ, kích thước của dây và tần số cyclotron của từ trường (trong trường hợp có mặt của từ trường ngoài). Kết quả giải tích được áp dụng tính số cho dây lượng tử hình chữ nhật $GaAs / GaAsAl$.

Kết quả tính số cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn vào các tham số của hệ là phi tuyến và có những khác biệt so với trong bán dẫn khối và hệ hai chiều. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào các đại lượng bên ngoài cấu trúc dây như nhiệt độ, cường độ và tần số sóng điện từ không thay đổi về mặt định tính so với dây lượng tử hình trụ. Tuy nhiên có sự khác biệt lớn so với dây lượng tử hình trụ trong sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào kích thước của dây, khi kích thước dây thay đổi giá trị định lượng và vị trí của đỉnh hấp thụ trên thang nhiệt độ của hệ đổi nhanh hơn. Ví dụ: khi $L_y = L_x = 26nm$, hệ số hấp thụ đạt giá trị cực đại $\alpha_{max} = 1,6m^{-1}$ tại nhiệt độ $T = 135K$, thay đổi kích thước của dây giảm một lượng $\Delta L_y = \Delta L_x = 1nm$ ($L_y = L_x = 25nm$), giá trị và vị trí của hệ số hấp thụ trên thang nhiệt độ tăng, $\alpha_{max} = 2,9m^{-1}$ tại nhiệt độ $T = 180K$. Trong khi đó, với dây lượng tử hình trụ, khi bán kính của dây cũng thay đổi một lượng tương đối lớn $\Delta R = 1nm$ nhưng vị trí của nó trên thang nhiệt độ chỉ biến đổi một lượng $\Delta T = 15K$. Điều này chứng tỏ hình dạng và kích thước dây lượng tử có ảnh hưởng đáng kể đối với sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ.

Khi có mặt của từ trường ngoài, phổ hấp thụ phi tuyến sóng điện từ là phổ vạch và gián đoạn, mức độ gián đoạn của các vạch phổ càng lớn khi tần số cyclotron của từ trường càng tăng. Sự thay đổi kích thước dây lượng tử hình chữ nhật cũng làm dịch chuyển vị trí các vạch hấp thụ. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ khi có mặt của từ trường lớn hơn khi không có mặt của từ trường, đồng thời tăng lên khi tăng tần số cyclotron của từ trường.

ẢNH HƯỞNG CỦA PHONON GIAM CẦM LÊN SỰ HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH (BỨC XẠ LASER) BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG BÁN DẪN THẤP CHIỀU

Trong lĩnh vực nghiên cứu lý thuyết đã có nhiều công trình nghiên cứu về bài toán hấp thụ sóng điện từ, như bài toán về nghiên cứu sự hấp thụ sóng điện từ yếu không có từ trường, trong các hệ thấp chiều bằng phương pháp Kubo-Mori [26, 34, 60, 61], bài toán nghiên cứu về hấp thụ sóng điện từ mạnh bằng phương pháp phương trình động lượng tử trong bán dẫn khối [17]. Trong các hệ bán dẫn hai chiều: siêu mạng pha tạp [58, 62], siêu mạng hợp phần [55] và hố lượng tử [63], bài toán này cũng đã được nghiên cứu bằng phương pháp phương trình động lượng tử. Tuy nhiên, trong các nghiên cứu đó các tác giả chưa tính đến sự giam cầm phonon trong cả hai trường hợp có mặt từ trường ngoài và không có mặt từ trường ngoài. Trong khi đó, có rất nhiều công trình nghiên cứu quốc tế đã chỉ ra rằng ảnh hưởng của phonon giam cầm lên các hiệu ứng vật lý trong siêu mạng pha tạp [63-68], trong siêu mạng hợp phần [20] và hố lượng tử [35] là rất đáng kể. Trong chương này, trên cơ sở phương pháp phương trình động lượng tử, chúng ta nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng giam cầm phonon lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong các hệ bán dẫn hai chiều [10].

4.1. ẢNH HƯỞNG CỦA PHONON GIAM CẦM LÊN SỰ HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH TRONG SIÊU MẠNG PHA TẠP

4.1.1. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong siêu mạng pha tạp

Xét siêu mạng pha tạp khi có mặt trường bức xạ laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ đặt vuông góc với trục của siêu mạng (trục z).

Hamiltonian của hệ điện tử giam cầm - phonon giam cầm (chỉ xét trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang) biểu diễn thông qua toán tử sinh hủy hạt (sự lượng tử hóa lần 2), có dạng [1-7, 10, 11]:

$$H = H_0 + U \quad (4.1)$$

H_0 là năng lượng của các điện tử giam cầm và phonon quang giam cầm không tương tác:

$$H_0 = \sum_{n, \vec{k}_\perp} \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} (\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t)) a_{n, \vec{k}_\perp}^+ a_{n, \vec{k}_\perp} + \sum_{m, \vec{q}_\perp} \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} b_{m, \vec{q}_\perp}^+ b_{m, \vec{q}_\perp} \quad (4.2)$$

trong đó U là năng lượng tương tác giữa điện tử giam cầm và phonon quang giam cầm:

$$U = \sum_{m, \vec{q}_\perp} \sum_{n, n', \vec{k}_\perp} C_{m, \vec{q}_\perp} I_m^m a_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}^+ a_{n, \vec{k}_\perp} (b_{m, \vec{q}_\perp}^+ + b_{m, \vec{q}_\perp}) \quad (4.3)$$

trong đó, $a_{n, \vec{k}_\perp}^+, a_{n, \vec{k}_\perp}$ là toán tử sinh, hủy điện tử ở trạng thái $|n, \vec{k}_\perp\rangle$; $b_{m, \vec{q}_\perp}^+, b_{m, \vec{q}_\perp}$ là toán tử sinh, hủy phonon ở trạng thái $|m, \vec{q}_\perp\rangle$; $\omega_{m, \vec{q}_\perp}$ là tần số của phonon quang giam cầm; m là các số lượng tử đặc trưng cho sự giam cầm của phonon ($m = 1, 2, \dots$); n là số lượng tử đặc trưng cho sự lượng tử hóa năng lượng của điện tử theo phương z ($n = 0, 1, 2, \dots$); $\vec{A}(t)$ là thế vector của trường điện từ, $C_{m, \vec{q}_\perp}$ là hằng số tương tác điện tử-phonon quang giam cầm, được xác định bởi:

$$\vec{A}(t) = \frac{e}{\Omega} \vec{E}_0 \sin(\Omega t) \quad (4.4)$$

$$|C_{m, \vec{q}_\perp}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp}}{\varepsilon_0 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \frac{1}{q_\perp^2 + q_z^2} \quad (4.5)$$

ở đây, V và ε_0 tương ứng là thể tích chuẩn hóa và hằng số điện; χ_∞ và χ_0 tương ứng là hệ số điện thẩm cao tần và hệ số điện thẩm tĩnh; $q_z = \frac{m\pi}{d}$

với d là chu kỳ của siêu mạng pha tạp. Phổ năng lượng và thừa số của điện tử trong trường hợp này có dạng:

$$\varepsilon(\vec{k}_{\perp}) = \omega_p \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{k^2 \hbar^2}{2m^*} \quad (4.6)$$

$$I_{nn'}^m = \sum_j \int_0^d e^{iq_z z} \Phi_n(z - jd) \Phi_{n'}(z - jd) dz \quad (4.7)$$

với $\Phi_{n(z)}$ là hàm sóng của trạng thái thứ n trong hố thế một chiều, d là chu kỳ siêu mạng; N_1 là số chu kỳ siêu mạng pha tạp, $\omega_p = \hbar \left(\frac{4\pi e^2 n_D}{\varepsilon_0 m^*} \right)^{1/2}$ là tần số plasma gây bởi các tạp chất donor, n_D là nồng độ pha tạp và m^* là khối lượng hiệu dụng của điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp.

Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài $\vec{B}$, chúng ta giả thiết rằng từ trường này được định hướng song song với trục siêu mạng pha tạp, nghĩa là $\vec{B} = (0, 0, B)$, chọn thế vector của trường sao cho $\vec{A} = (-B_y, 0, 0)$. Khi đó, từ trường chỉ ảnh hưởng lên chuyển động của điện tử trong mặt phẳng vuông góc với trục siêu mạng. Khi đó Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong biểu diễn lượng tử hóa lần thứ hai dưới tác dụng của trường laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ đặt vuông góc và từ trường $\vec{B}$ có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} H_B = & \sum_{n, N, \vec{k}_{\perp}} \varepsilon_{n, N}^H \left(\vec{k}_{\perp} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) a_{n, N, \vec{k}_{\perp}}^{\dagger} a_{n, N, \vec{k}_{\perp}} + \sum_{m, \vec{q}_{\perp}} \hbar \omega_{m, \vec{q}_{\perp}} b_{\vec{q}_{\perp}, m}^{\dagger} b_{m, \vec{q}_{\perp}} + \\ & + \sum_{n, N, n', N', \vec{k}_{\perp}, \vec{q}_{\perp}} C_{m, \vec{q}_{\perp}} I_{n, n'}^m J_{N, N'} \left(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2 \right) a_{n', N', \vec{k}_{\perp} + \vec{q}_{\perp}}^{\dagger} a_{n, N, \vec{k}_{\perp}} (b_{m, \vec{q}_{\perp}} + b_{m, -\vec{q}_{\perp}}^{\dagger}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

trong đó: $n = 0, 1, 2, \dots$ là số lượng tử hóa năng lượng theo trục z , $N = 0, 1, 2, \dots$ là chỉ số mức phân vùng Landau; $(n, N, \vec{k}_{\perp})$ và $(n', N', \vec{k}_{\perp} + \vec{q}_{\perp})$ là

trạng thái của điện tử trước và sau tán xạ. $a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+$ và $a_{n,N,\vec{k}_\perp}$ là các toán tử sinh hủy điện tử (phonon quang) ở trạng thái $(n, N, \vec{k}_\perp)$; ($b_{m,\vec{q}_\perp}^+$ và $b_{m,\vec{q}_\perp}$) là các toán tử sinh hủy phonon quang ở trạng thái $\vec{q} = (\vec{q}_\perp, \vec{q}_z)$. Hằng số tương tác và thừa số dạng điện tử được xác định bởi (4.5, 4.7). Biểu thức $J_{N,N'}(u)$ và phổ năng lượng của điện tử được tính bởi công thức:

$$J_{N,N'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{N'}(\vec{r}_\perp - a_c^2 \vec{r}_\perp - a_c^2 \vec{q}_\perp) e^{i\vec{q}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} \Phi_N(\vec{r}_\perp - a_c^2 \vec{k}_\perp) d\vec{r} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) = \hbar \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (4.10)$$

trong đó, $u = \frac{1}{2} a_c^2 q_\perp^2$; $\vec{r}_\perp$ là vector xác định vị trí của điện tử trên mặt phẳng (x, y) ; a_c là bán kính quỹ đạo điện tử trong mặt phẳng (x, y) ; $\phi_N(x)$ là hàm điều hòa; $\Omega_B = \frac{eB}{m^*c}$ là tần số cyclotron.

4.1.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp

Xét trường hợp không có từ trường ngoài, để xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt (hay hàm phân bố điện tử) $n_{n,\vec{k}_\perp}(t) = \langle a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp} \rangle_t$:

$$i\hbar \frac{\partial n_{n,\vec{k}_\perp}(t)}{\partial t} = \langle a_{n,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,\vec{k}_\perp}, H \rangle_t \quad (4.11)$$

ở đây $\langle \psi \rangle_t$ là hàm trung bình thống kê ở thời điểm t , và

$\langle \psi \rangle_t = \text{Tr}(\hat{W} \hat{\psi})$ ($\hat{W}$ là toán tử ma trận mật độ). Sử dụng các biểu thức của Hamiltonian trên, thực hiện các biến đổi đại số toán tử, biểu thức (4.11) có dạng:

$$\frac{\partial n_{n, \vec{k}_\perp}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \sum_{m, n', \vec{q}_\perp} C_{\vec{q}_\perp}^m I_{n, n'}^m \left[F_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp, n, \vec{k}_\perp, m, \vec{q}_\perp}(t) + F_{n, \vec{k}_\perp, n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp, m, -\vec{q}_\perp}(t) \right. \\ \left. - F_{n, \vec{k}_\perp, n', \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp, m, \vec{q}_\perp}(t) - F_{n', \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp, n, \vec{k}_\perp, m, -\vec{q}_\perp}(t) \right] \quad (4.12)$$

ở đây, $F_{n_1, \vec{k}_1, n_2, \vec{k}_2, m, \vec{q}_\perp}(t) = \langle a_{n_1, \vec{k}_1}^+ a_{n_2, \vec{k}_2} b_{m, \vec{q}_\perp} \rangle_t$. Tính: $F_{n_1, \vec{k}_1, n_2, \vec{k}_2, m, \vec{q}_\perp}(t)$, bằng cách xây dựng phương trình động lượng tử cho $F_{n_1, \vec{k}_1, n_2, \vec{k}_2, m, \vec{q}_\perp}(t)$. Ta có:

$$i\hbar \frac{\partial \langle a_{n_1, \vec{k}_1}^+ a_{n_2, \vec{k}_2} b_{m, \vec{q}_\perp} \rangle_t}{\partial t} = \langle [a_{n_1, \vec{k}_1}^+ a_{n_2, \vec{k}_2} b_{m, \vec{q}_\perp}, H] \rangle_t \quad (4.13)$$

Sử dụng các tính chất của giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy của điện tử và phonon [7-9], [12, 13], cùng với các biến đổi toán học tương tự như đã làm bán dẫn khối [52], chúng ta thu được phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp khi kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm.

Giải phương trình trên bằng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp. Chúng ta thu được hàm phân bố của điện tử không cân bằng trong siêu mạng pha tạp kể tới ảnh hưởng của phonon giam cầm:

$$n_{n, \vec{k}_\perp}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{q}_\perp, n'} |I_{n, n'}^m|^2 |C_{m, \vec{q}_\perp}|^2 \sum_{s, l=-\infty}^{\infty} J_s \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) J_{l+s} \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \frac{\hbar}{l\Omega} \exp(-il\Omega t) \times \\ \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} N_{m, \vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) - \hbar\omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} + \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp} (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} N_{m, \vec{q}_\perp}}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) + \hbar\omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right. \\ \left. - \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} N_{m, \vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} - \frac{\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} N_{m, \vec{q}_\perp}}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right\} \quad (4.14)$$

ở đây, $\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} (N_{m, \vec{q}_\perp})$ là hàm phân bố cân bằng của điện tử (phonon)

không phụ thuộc thời gian; $J_k(x)$ là hàm Bessel đối số thực.

Như vậy, bằng phương pháp phương trình động lượng tử, chúng ta thu được biểu thức giải tích của hàm phân bố không cân bằng điện tử trong siêu mạng pha tạp có kể đến sự giam cầm của phonon. Biểu thức này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng pha tạp khi kể đến hiệu ứng phonon giam cầm trong siêu mạng pha tạp.

Khi có mặt từ trường ngoài, phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong trường hợp này là:

$$i\hbar \frac{\partial \langle a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1} \rangle_t}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_1}(t)}{\partial t} = \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1}, H_B \right] \right\rangle_t, \quad (4.15)$$

trong đó: $\langle \psi \rangle_t$ là giá trị thống kê trung bình ở thời điểm t . Thay (4.8) vào (4.15) ta được:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_1}(t)}{\partial t} = & \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1}, \sum_{n',N',\bar{k}_1'} \varepsilon_{n',N'}^H \left(\bar{k}_1 - \frac{e}{\hbar c} \bar{A}(t) \right) a_{n',N',\bar{k}_1'}^+ a_{n',N',\bar{k}_1'} \right] \right\rangle_t + \\ & + \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1}, \sum_{m,\bar{q}_1} \hbar \omega_{m,\bar{q}_1} b_{m,\bar{q}_1}^+ b_{m,\bar{q}_1} \right] \right\rangle_t + \\ & + \left\langle \left[a_{n,N,\bar{k}_1}^+ a_{n,N,\bar{k}_1}, \sum_{n',N',\bar{k}_1'} \sum_{m,\bar{q}_1} I_{n,n'}^m J_{N,N'} C_{m,\bar{q}_1} a_{n',N',\bar{k}_1'+\bar{q}_1}^+ a_{n',N',\bar{k}_1'} (b_{m,\bar{q}_1} + b_{m,-\bar{q}_1}^+) \right] \right\rangle_t, \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sử dụng các hệ thức đại số toán tử, thực hiện các phép biến đổi ta thu được biểu thức:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_1}(t)}{\partial t} = & \sum_{n',N',\bar{q}_1} C_{m,\bar{q}_1} I_{n,n'}^m J_{N,N'} \times \left[F_{n,N,\bar{k}_1,n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1,m}(t) + F_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1,n,N,\bar{k}_1-\bar{q}_1,m}^*(t) - \right. \\ & \left. - F_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1,n,N,\bar{k}_1,\bar{q}_1,m}(t) - F_{n,N,\bar{k}_1,n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1-\bar{q}_1,m}^*(t) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\text{trong đó: } F_{n_1,N_1,\bar{k}_1,n_2,N_2,\bar{k}_2,m,\bar{q}_1}(t) = \left\langle a_{n_1,N_1,\bar{k}_1}^+ a_{n_2,N_2,\bar{k}_2} b_{m,\bar{q}_1} \right\rangle_t, \quad (4.18)$$

Để tính toán $F_{n_1 N_1 \bar{k}_1 n_2 N_2 \bar{k}_2 m \bar{q}_1}(t)$, ta đi thiết lập phương trình động lượng tử cho toán tử $\langle a_{n_1 N_1 \bar{k}_1}^+ a_{n_2 N_2 \bar{k}_2} b_{m \bar{q}_1} \rangle_t$:

$$i\hbar \frac{\partial a_{n_1 N_1 \bar{k}_1}^+ a_{n_2 N_2 \bar{k}_2} b_{m \bar{q}_1}}{\partial t} = \left[\langle a_{n_1 N_1 \bar{k}_1}^+ a_{n_2 N_2 \bar{k}_2} b_{m \bar{q}_1} \rangle_t, H \right], \quad (4.19)$$

Sử dụng các tính chất giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy của điện tử và phonon, cùng các phép biến đổi toán học, giải phương trình vi phân, chúng ta thu nhận được phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng pha tạp khi kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm, trường hợp có mặt từ trường ngoài như biểu thức dưới đây:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial n_{n N \bar{k}_1}(t)}{\partial t} = & \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{n' N' \bar{q}_1 m} |C_{\bar{q}_1 m}|^2 |I_{n n'}|^2 |J_{N N'}|^2 \times \sum_{l, s=-\infty}^{\infty} J_l\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \exp[-i(l-s)\Omega t] \times \\ & \times \int_{-\infty}^t dt \left\{ \left[n_{n N \bar{k}_1}(N_{m \bar{q}_1} + 1) - n_{n' N' \bar{k}_1 - \bar{q}_1} N_{m \bar{q}_1} \right] \times \right. \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n N}^H(\bar{k}_1) - \varepsilon_{n' N'}^H(\bar{k}_1 - \bar{q}) - \hbar \omega_{m \bar{q}_1} - s\hbar \Omega + i\hbar \delta \right) (t - t_1) \right] + \\ & + \left[n_{n N \bar{k}_1} N_{m \bar{q}_1} - n_{n' N' \bar{k}_1 - \bar{q}_1} (N_{m \bar{q}_1} + 1) \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n N}^H(\bar{k}_1) - \varepsilon_{n' N'}^H(\bar{k}_1 - \bar{q}) + \hbar \omega_{m \bar{q}_1} - s\hbar \Omega + i\hbar \delta \right) (t - t_1) \right] - \\ & - \left[n_{n' N' \bar{k}_1 + \bar{q}_1} (N_{m \bar{q}_1} + 1) - n_{n N \bar{k}_1} N_{m \bar{q}_1} \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n' N'}^H(\bar{k}_1 + \bar{q}) - \varepsilon_{n N}^H(\bar{k}_1) - \hbar \omega_{m \bar{q}_1} - s\hbar \Omega + i\hbar \delta \right) (t - t_1) \right] - \\ & - \left[n_{n' N' \bar{k}_1 + \bar{q}_1} N_{m \bar{q}_1} - n_{n N \bar{k}_1} (N_{m \bar{q}_1} + 1) \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_{n' N'}^H(\bar{k}_1 + \bar{q}) - \varepsilon_{n N}^H(\bar{k}_1) + \hbar \omega_{m \bar{q}_1} - s\hbar \Omega + i\hbar \delta \right) (t - t_1) \right] \Big\} \Big|_{\delta \rightarrow 0^+} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Giải phương trình (4.20), chúng ta sẽ tính được mật độ dòng, là căn cứ để tìm được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ sóng điện tử trong trường hợp có mặt từ trường ngoài và tính đến sự giam giữ phonon:

$$n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t) = \frac{-1}{\hbar} \sum_{n',N',\vec{q}_\perp,m} |C_{n,\vec{q}_\perp}|^2 |I_{n,n'}^m|^2 |J_{N,N'}|^2 \times \sum_{k,s} J_{k+s}(\frac{\lambda}{\Omega}) J_s(\frac{\lambda}{\Omega}) \frac{e^{(-ik\Omega t)}}{k\Omega} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} N_{m,\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - s\hbar\Omega + i\hbar\delta} + \frac{\bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} N_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - s\hbar\Omega + i\hbar\delta} - \right.$$

$$\left. \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} N_{m,\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - s\hbar\Omega + i\hbar\delta} - \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} N_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - s\hbar\Omega + i\hbar\delta} \right\}_{\delta \rightarrow 0^+} \quad (4.21)$$

4.1.3. Hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi có ảnh hưởng của phonon giam cầm

Để tìm biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi kể đến sự giam cầm của phonon trong trường hợp không có từ trường ngoài. Trước hết, ta đi tìm biểu thức tường minh của mật độ dòng hạt tải cho trường hợp này, tiếp theo áp dụng công thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh để tìm biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến:

$$\vec{J}_\perp(t) = \frac{e\hbar}{m^*} \sum_{n,\vec{k}_\perp} \left(\vec{k}_\perp - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}(t) \right) n_{n,\vec{k}_\perp}(t); \quad (4.22)$$

Sử dụng công thức: $\frac{1}{x \pm i\delta} = \frac{\rho}{x} \mp i\pi\delta(x) \quad (4.23)$

Chúng ta chỉ xét phần thực và giới hạn hấp thụ một photon. Thực hiện các phép đổi biến như đã trình bày ở phần tính toán trong bá n dẫn khối. Từ biểu thức của hàm phân bố không cân bằng của điện tử, với giả thiết khí điện tử là không suy biến và tán xạ điện tử - phonon quang chiếm ưu thế, ta thiết lập được biểu thức giải tích tổng quát cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp có kể đến sự giam cầm của phonon là:

$$\alpha = \frac{32\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{c \sqrt{\chi_\infty} E_o^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{m,n,n'} \sum_{\vec{k}_\perp, \vec{q}_\perp} \sum_{l=1}^{\infty} |I_{n,n'}^m|^2 \frac{l^2}{q_\perp^2 + (m\pi/d)^2} \times$$

$$\times J^2 \left(\frac{e \vec{E} \cdot \vec{q}}{m^* \Omega^2} \right) \bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} \delta \left[\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - \hbar \Omega \right] + \left[\omega_{m, \vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m, \vec{q}_\perp} \right] \quad (4.24)$$

Trong biểu thức (4.24), $[\omega_{m, \vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m, \vec{q}_\perp}]$ có nghĩa là số hạng thứ hai thu được từ số hạng thứ nhất nếu thay $\omega_{m, \vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m, \vec{q}_\perp}$. Như vậy, khác với cấu trúc siêu mạng pha tạp khi bỏ qua hiệu ứng phonon giam cầm, hệ số hấp thụ sóng điện từ trong siêu mạng pha tạp có kể đến hiệu ứng phonon giam cầm không chỉ phụ thuộc phi tuyến vào các thông số của hệ hai chiều của siêu mạng pha tạp mà còn phụ thuộc vào các số lượng tử m, đặc trưng cho sự giam cầm phonon. Để thấy rõ hơn sự phụ thuộc này ta xét hai trường hợp cụ thể: hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ ngoài.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Trường hợp này, tần số sóng điện từ phải thỏa mãn điều kiện $|\hbar \Omega - \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp}| \ll \varepsilon$. Xét trường hợp hấp thụ một photon và để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong công thức (4.24) ta dựa vào hàm phân bố cân bằng của điện tử theo phân bố Boltzmann (xét khí điện tử không suy biến), $n_o = \sum_{n, \vec{k}_\perp} n_{n, \vec{k}_\perp}(t)$ là mật độ electron trong siêu mạng pha tạp:

$$\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} = n_o \exp \left(-\frac{\varepsilon_{n, \vec{k}_\perp}}{k_B T} \right) = n_o \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m^* k_B T} - \hbar \omega_p \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (4.25)$$

Tách tổng trên theo hai tổng theo $\vec{k}_\perp$ và $\vec{q}_\perp$ riêng rẽ và thực hiện các phép biến đổi sau:

$$\sum_{\vec{k}_\perp} (\dots) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[\varphi(x)] dx = \sum \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|}; \quad \varphi(x_i) = 0$$

$$\sum_{\vec{q}} (...) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \bar{q}_{\perp} d\bar{q}_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z$$

Sử dụng các kết quả:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8};$$

áp dụng [57], ta được:

$$\int_0^{\infty} (x + ax^3) \exp\left(-\frac{\rho}{x^2} - \sigma x^2\right) dx = \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} K_1(2\sqrt{\rho\sigma}) + a \left(\frac{\rho}{\sigma}\right) K_2(2\sqrt{\rho\sigma})$$

với $K_\nu(x)$ là hàm Bessel đối số ảo thỏa mãn:

$$K_2(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} + \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left(1 + \frac{3}{8x}\right)$$

ta thu được biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\pi e^4 (k_B T)^2 n_o^*}{2 \varepsilon_o c \sqrt{\chi_\infty} \hbar^3 \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \left\{ \exp \left[\frac{\hbar}{k_B T} (\omega_o - \Omega) - 1 \right] \right\} \sum_{m, n, n'} |I_{nn'}^m|^2 \times \\ & \times \exp \left[-\frac{\hbar^2}{2k_B T} (\xi + |\xi|) \right] \left[1 + \frac{3}{16} \frac{e^2 E_o^2 k_B T}{\hbar^2 m^* \Omega^4} \left(2 + \frac{|\xi|}{k_B T} \right) \right] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \end{aligned} \quad (4.26)$$

ở đây,

$$\xi = \hbar \omega_p (n' - n) + \hbar \omega_o - \hbar \Omega + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2;$$

$$n_o^* = \frac{n_o e^{3/2} \pi^{3/2} \hbar^3}{V_o m^{*3/2} (k_B T)^{3/2}}$$

Trong trường hợp giới hạn, khi cho số lượng tử m tiến tới không ($m = 0$), thì hệ số hấp thụ phi tuyến trường hợp này trở về biểu thức của nó trong trường hợp kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm [58]; nếu tiếp tục cho cường độ điện trường E_o tiến tới 0, thì ta sẽ thu được kết quả hệ số hấp thụ trong trường hợp tuyến tính [61]. Điều này khẳng định sự đúng đắn trong các tính toán lý thuyết của chúng ta khi xây dựng biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh có kể đến hiệu ứng giam cầm của phonon trong siêu mạng pha tạp. Biểu thức (4.26) về hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ là kết quả mới lần đầu thu nhận được bởi nghiên cứu này khi xem xét bài toán hấp thụ trong siêu mạng pha tạp một cách đầy đủ nhất, xét cả sự giam cầm phonon mà các nghiên cứu khác chưa đề cập tới.

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này, để có quá trình hấp thụ sóng điện từ mạnh trong siêu mạng pha tạp khi kể đến sự giam cầm của phonon thì tần số sóng điện từ đủ lớn sao cho điều kiện $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m,\bar{q}_1}| \gg \varepsilon$ phải thỏa mãn. Do đó, có thể viết $|\bar{k}_1| \ll |\bar{q}_1|$ dẫn đến:

$$\delta[\varepsilon_n(\bar{k}_1 + \bar{q}_1) - \varepsilon_n(\bar{k}_1) + \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - \hbar\Omega] \approx \delta\left[\hbar\omega_p(n' - n) + \frac{\hbar^2(q_1^2 + q_2^2)}{2m} + \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - \hbar\Omega\right]$$

Tính toán tương tự như trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, chúng ta thu được biểu thức hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi xét đến sự giam cầm của phonon cho trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

$$\alpha = \frac{\pi^3 e^4 k_B T n_o^*}{\varepsilon_o c \sqrt{\chi_\infty} \hbar^2 m^* \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \left\{ 1 - \exp\left[\frac{\hbar}{k_B T} (\omega_o - \Omega) - 1 \right] \right\} \sum_{m,n,n'} |I_{n,n'}^m|^2 \times$$

$$\times \left[1 + \frac{3}{16} \frac{\varepsilon_o^2 E_o^2}{\hbar^2 m^* \Omega^4} \xi \right] 2m^* \xi^{3/2} \left[2m^* \xi + \left(\frac{m^* \pi \hbar}{d} \right)^2 \right]^{-1} + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \quad (4.27)$$

Tương tự như trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, khi chúng ta xét trường hợp giới hạn cho số lượng tử m tiến tới 0 thì biểu thức (4.27) trở về kết quả của hệ số hấp thụ phi tuyến trường khi không xét tới ảnh hưởng của sự giam cầm phonon đã công bố trong [58].

Khi có mặt từ trường ngoài, chúng ta thay (4.21) vào biểu thức (4.22), tiếp đó thực hiện một số phép biến đổi ta thu nhận được biểu thức của mật độ dòng điện khi có mặt từ trường, dưới ảnh hưởng của sự giam giữ phonon như sau:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\perp}(t) = & \frac{-e^2 n_o \vec{E}_o}{m^* \Omega} \cos(\Omega t) + \frac{2e\pi}{m} \sum_{n,N,\vec{k}_{\perp},\vec{q}_{\perp},m} |C_{\vec{q}_{\perp},m}|^2 |I_{n,N}^m|^2 |J_{N,N'}|^2 \times \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{q}_{\perp}}{k\Omega} \sin(k\Omega t) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \left[J_{s+k}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) + J_{s-k}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \right] \times \\ & \times \left[\bar{n}_{n,N,\vec{k}_{\perp}} (N_{\vec{q}_{\perp}} + 1) - \bar{n}_{n,N',\vec{k}_{\perp}+\vec{q}_{\perp}} N_{\vec{q}_{\perp}} \right] \times \delta \left[\varepsilon_{n,N'}^H(\vec{k}_{\perp} + \vec{q}) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_{\perp}) + \hbar\omega_o - s\hbar\Omega \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Từ biểu thức (1.51), tính toán nhận được biểu thức cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh α được viết như sau:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{8\pi}{c\sqrt{\chi_{\infty}} E_o^2} \left[\left\langle \frac{-e^2 n_o \vec{E}_o}{m^* \Omega} \cos(\Omega t) \vec{E}_o \sin(\Omega t) \right\rangle_t + \right. \\ & + \frac{2\pi e}{m^*} \left\langle \sum_{n,N,\vec{k}_{\perp},\vec{q}_{\perp},m} |C_{\vec{q}_{\perp},m}|^2 |I_{n,N}^m|^2 |J_{N,N'}|^2 \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{q}_{\perp}}{k\Omega} \sin(k\Omega t) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \times \right. \\ & \times \left[J_{s+k}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) + J_{s-k}\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right) \right] \times \left[\bar{n}_{n,N,\vec{k}_{\perp}} (N_{m,\vec{q}_{\perp}} + 1) - \bar{n}_{n,N',\vec{k}_{\perp}+\vec{q}_{\perp}} N_{m,\vec{q}_{\perp}} \right] \times \\ & \times \delta \left[\varepsilon_{n,N'}^H(\vec{k}_{\perp} + \vec{q}) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_{\perp}) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_{\perp}} - s\hbar\Omega \right] \vec{E}_o \sin(\Omega t) \left. \right\rangle_t \end{aligned} \quad (4.29)$$

Thực hiện các tính toán, biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong siêu mạng pha tạp khi có mặt của từ trường dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm, ta thu được như sau:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{32\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{V \epsilon_o c \sqrt{\chi_\infty} E_o^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{n, N, \vec{k}_\perp, \vec{q}_\perp, m} |I_{n, N'}^m|^2 |J_{N, N'}|^2 \times \\
& \times \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{s}{q_\perp^2 + \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2} J_s^2 \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) \left[\bar{n}_{n, N, \vec{k}_\perp} - \bar{n}_{n', N', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} \right] \times \\
& \times \delta \left[\epsilon_{n', N'}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \epsilon_{n, N}^H(\vec{k}_\perp) + \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - s \hbar \Omega \right] + \left[\omega_{m, \vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m, \vec{q}_\perp} \right]
\end{aligned} \quad (4.30)$$

Thực hiện các phép toán sử dụng tính chất của hàm Lagrange, phép tính tích phân, xét trường hợp điện tử không suy biến

$$\bar{n}_{n, N, \vec{k}_\perp} = n_o \exp \left[\frac{-1}{k_B T} \epsilon_{n, N}^H(\vec{k}_\perp) \right], \text{ trong trường hợp hấp thụ một photon.}$$

Ta sẽ thu được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp khi có mặt từ trường ngoài dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm như sau:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{L_y e^4 n_o k_B T \Omega_B}{8V \epsilon_o m^* c \sqrt{\chi_\infty} a_c^2 \Omega^3 \hbar} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \times \sum_{n, n', N, N', m} |I_{n, n'}^m|^2 \times \left[1 + (N + N' + 1) \frac{3e^2 E_o^2}{16a_c^2 m^{*2} \Omega^4} \right] \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \frac{\hbar \sqrt{\bar{A}} |N - N'|}{|N - N'| \left[\hbar \omega_p (n' - n) + \hbar \Omega_B (N' - N) + \hbar (\omega_o - \Omega) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 \right]^2 + \hbar^2 \bar{A}} + \\
& + \left[\omega_o \rightarrow -\omega_o \right]
\end{aligned} \quad (4.31)$$

trong đó:

$$\bar{A} = N_o \frac{e^2 \omega_o}{2\pi \hbar^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{n, n'} |I_{n, n'}^m|^2$$

Như vậy, từ phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm, chúng ta đã thiết lập được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang khi có từ trường ngoài dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm. Nhìn vào biểu thức (4.31) ta thấy hệ

số α không những phụ thuộc phi tuyến vào cường độ $\vec{E}_o$ và năng lượng $\hbar\Omega$ của trường bức xạ laser, nồng độ pha tạp n_D và nhiệt độ T của hệ, phụ thuộc vào tần số cyclotron Ω_B (từ trường $\vec{B}$), chu kì d , số chu kì N_1 của siêu mạng mà còn phụ thuộc vào m . Khi không kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm tức $m \rightarrow 0$, thì biểu thức (4.31) lại trở về biểu thức của hệ số hấp thụ ở trường hợp có từ trường nhưng chưa kể đến sự giam cầm phonon [58, 62].

4.1.4. Khảo sát số và thảo luận

Để thấy rõ kết quả tính toán lý thuyết về ảnh hưởng của hiệu ứng giam cầm phonon lên hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh, chúng ta tính toán số, vẽ đồ thị sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số của hệ. Các tham số được sử dụng trong quá trình tính toán như đã được sử dụng ở trong [58] với siêu mạng pha tạp cụ thể là n-GaAs/p-GaAs:

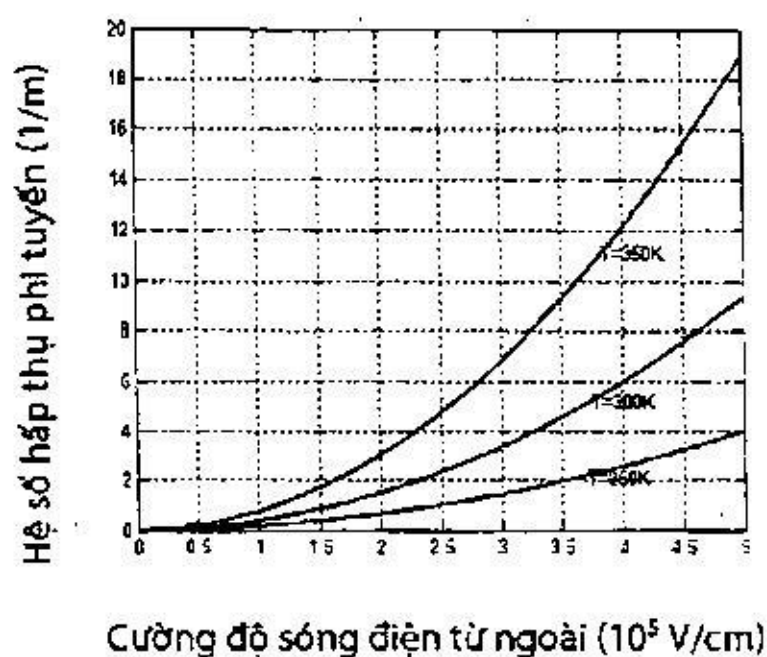
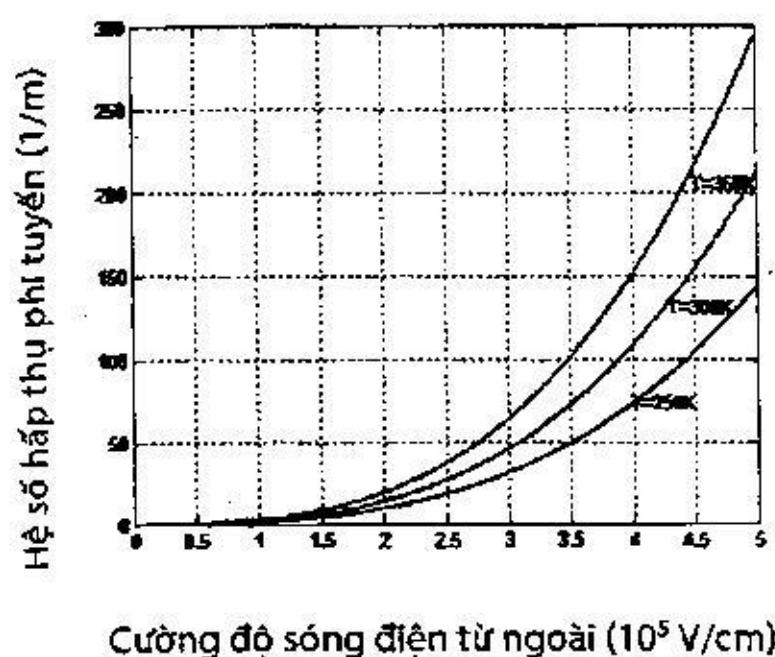
Bảng 4.1: Các tham số sử dụng tính toán số đối với siêu mạng pha tạp

Dại lượng	Kí hiệu	Giá trị
Hệ số điện môi tĩnh	χ_o	12,9
Hệ số điện môi cao tần	χ_∞	10,9
Điện tích hiệu dụng của điện tử (C)	e	$2,07e_0$
Khối lượng hiệu dụng của điện tử (kg)	m^*	$0,067m_0$
Năng lượng của phonon quang (meV)	$\hbar\omega_o$	36,25
Nồng độ hạt tải điện (m^{-3})	n_o	5.10^{22}
Chu kì d của siêu mạng (m)	d	8.10^{-8}
Nồng độ pha tạp	n_D	10^{24}
Hằng số điện môi	ϵ_o	12,5

Khảo sát hệ số hấp thụ trong trường hợp không có từ trường ngoài cho thấy:

Các đồ thị từ hình 4.1 đến hình 4.4, biểu diễn hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp

cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng. Trong hình 4.1 và 4.2, biểu diễn sự phụ thuộc phi tuyến mạnh của hệ số hấp thụ vào cường độ điện trường E_0 tại các nhiệt độ khác nhau. Kết quả cho thấy không có sự khác biệt nhiều về dáng điệu của sự phụ thuộc nhưng giá trị của hệ số hấp thụ trong trường hợp tính đến sự giam cầm phonon đã tăng lên khoảng 15 lần so với trường hợp phonon không giam cầm [58].

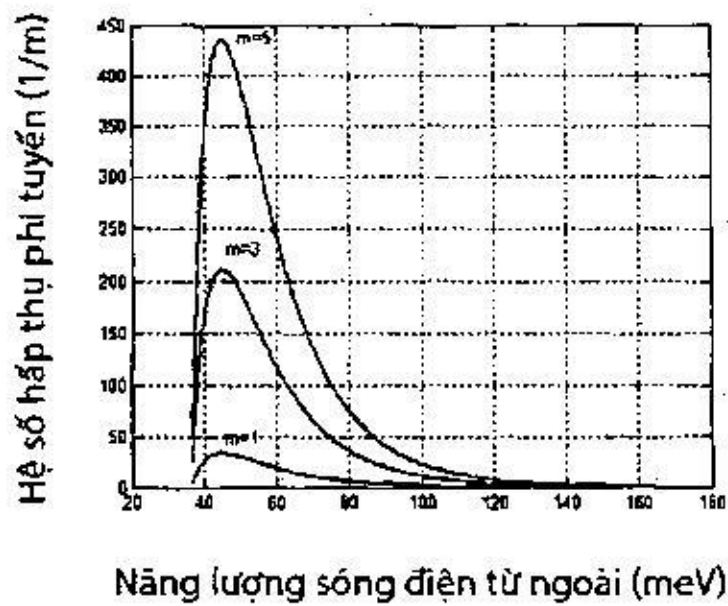


Hình 4.1. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo cường độ sóng điện từ E_0 và nhiệt độ T (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

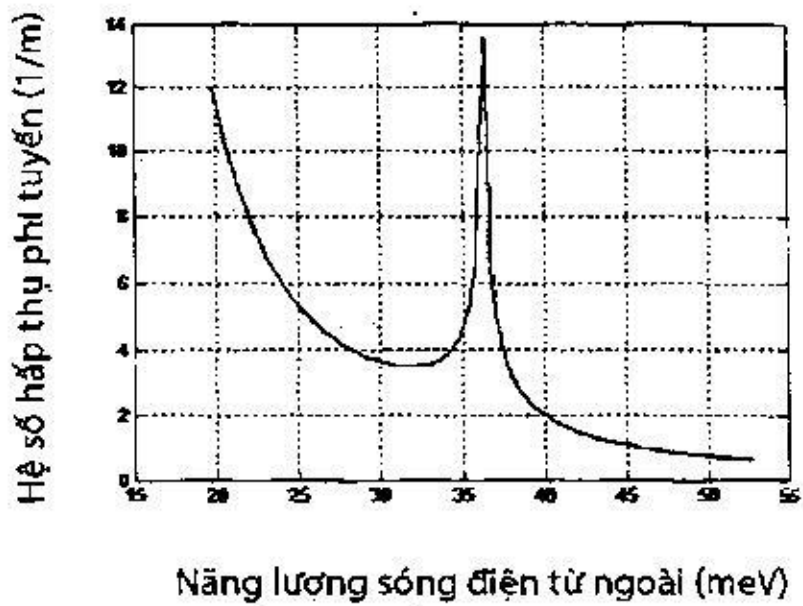
Hình 4.2. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo cường độ sóng điện từ E_0 và nhiệt độ T (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

Sự khác biệt thể hiện rất rõ khi so sánh sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh vào năng lượng của sóng điện từ ngoài $\hbar\Omega$ cho hai trường hợp phonon giam cầm (hình 4.3) và phonon không giam cầm (hình 4.4). Hai trường hợp này đều xuất hiện cộng hưởng khi tần số sóng điện từ tiến gần đến tần số của phonon quang ($\Omega = \omega_0$). Tuy nhiên, giá trị cộng hưởng trong trường hợp phonon giam cầm lớn hơn nhiều so với trường hợp phonon không giam cầm (xem hình 4.3 và 4.4), đồng thời đỉnh cộng hưởng trong trường hợp phonon giam cầm lùi dần về phía năng lượng sóng điện từ tăng. Đỉnh cộng hưởng của hệ số hấp thụ khi phonon giam cầm cũng phụ thuộc mạnh vào số lượng tử m của phonon giam cầm.

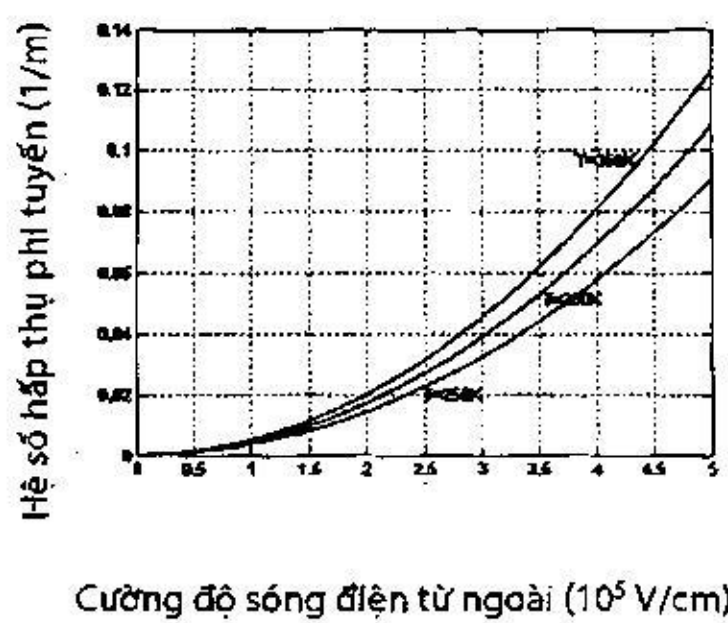
Các đồ thị từ hình 4.5 đến hình 4.8 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng pha tạp cho trường hợp hấp thụ xa ngưỡng. Trường hợp này, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào các thông số của hệ tương tự như trường hợp hấp thụ gần ngưỡng nhưng giá trị của hệ số hấp thụ nhỏ hơn rất nhiều so với trường hợp gần ngưỡng, cỡ 10^4 lần. Kết quả tính toán cho thấy, giá trị của hệ số hấp thụ trong trường hợp phonon giam cầm lớn hơn khoảng chục lần so với trường hợp phonon không giam cầm [58].



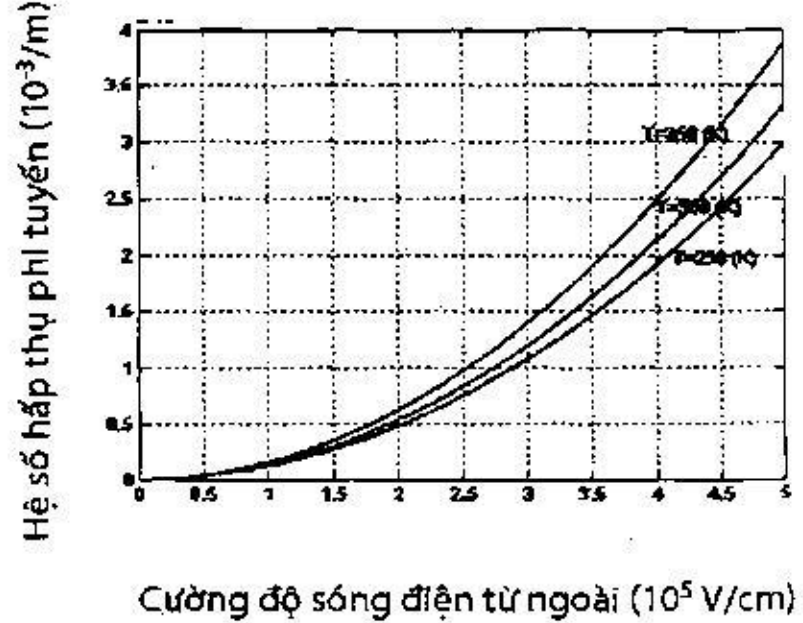
Hình 4.3. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)



Hình 4.4. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$ (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)



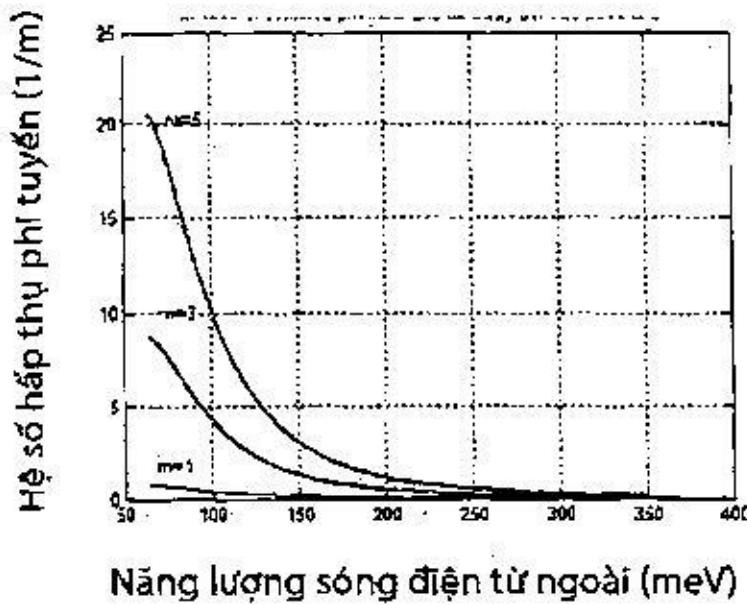
Hình 4.5. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0, T (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



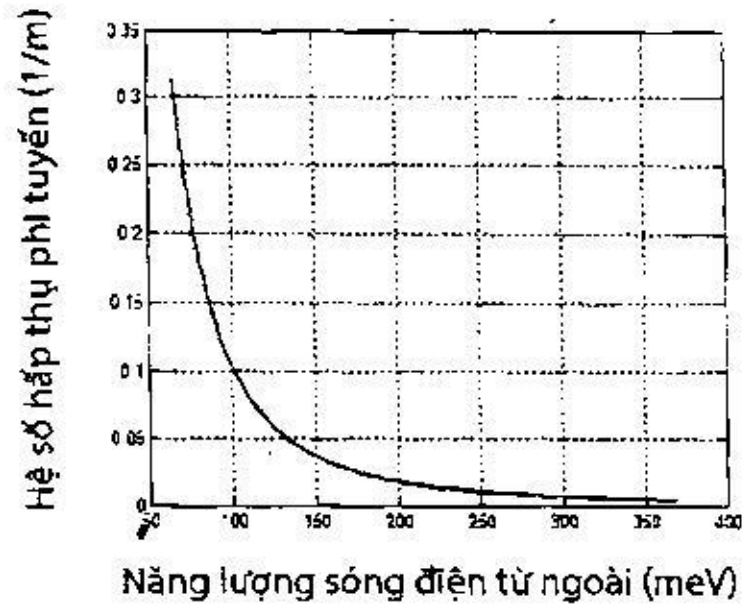
Hình 4.6. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0, T (phonon không giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

Đồ thị trên các hình 4.5 đến hình 4.8 chỉ ra rằng trong cả hai trường hợp, hệ số hấp thụ đều phụ thuộc mạnh và phi tuyến vào biên độ của trường điện từ ngoài, nhiệt độ T của hệ và năng lượng $\hbar\Omega$ của sóng điện từ.

Hệ số hấp thụ giảm nhanh khi năng lượng của sóng điện từ tăng, đồng thời trong trường hợp phonon giam cầm thì hệ số hấp thụ cũng phụ thuộc mạnh vào số lượng tử m đặc trưng cho sự giam cầm của phonon, độ lớn hệ số hấp thụ tăng lên khi số lượng tử m tăng. Ảnh hưởng của phonon giam cầm thể hiện mạnh qua sự tăng đáng kể giá trị của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ so với kết quả khi không tính đến sự giam cầm phonon [58].



Hình 4.7. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



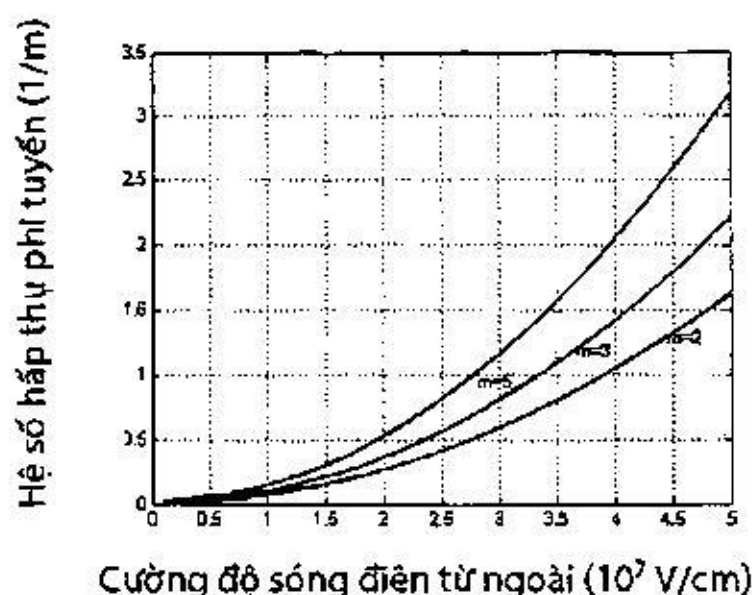
Hình 4.8. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (không giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

Trong trường hợp có từ trường ngoài, kết quả khảo sát hệ số hấp thụ cho thấy:

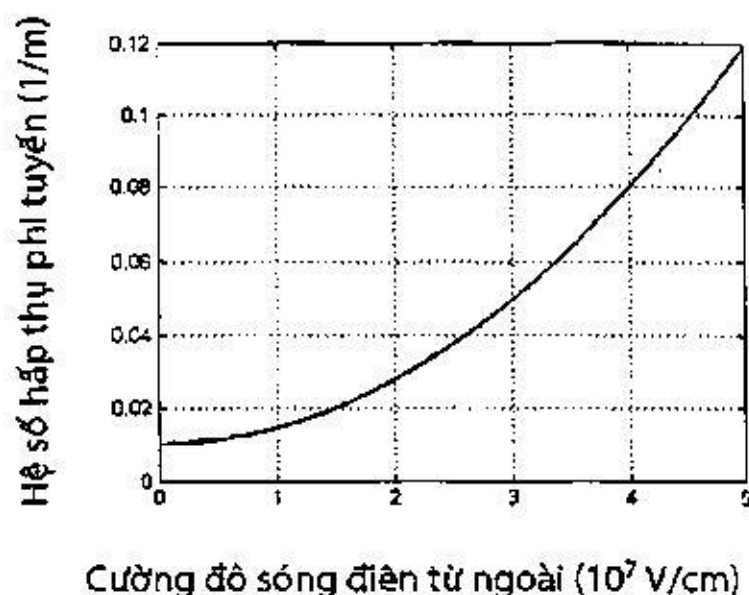
Đánh giá số biểu thức (4.31) và vẽ đồ thị cho siêu mạng pha tạp điển hình n-GaAs/p-GaAs, tiến hành so sánh kết quả với trường hợp vắng từ trường ngoài ở mục trên và trường hợp không tính đến sự giam cầm phonon [58]. Kết quả:

Đồ thị trên các hình 4.9 - 4.10 chỉ ra sự phụ thuộc hệ số hấp thụ α vào cường độ sóng điện từ E_0 . Từ đồ thị ta nhận thấy: α phụ thuộc phi

tuyến vào cường độ E_0 của sóng điện từ, khi cường độ E_0 tăng thì α cũng tăng lên rất nhanh trong cả hai trường hợp nhưng độ lớn của hệ số hấp thụ nhỏ hơn so với trường hợp vắng mặt từ trường cỡ 100 lần. Trường hợp phonon giam cầm thì ngoài phụ thuộc vào E_0 , α còn phụ thuộc rất mạnh vào chỉ số lượng tử m . Cụ thể, khi m tăng thì α càng tăng nhanh so với E_0 và tăng nhanh hơn so với trường hợp phonon không giam cầm [58].

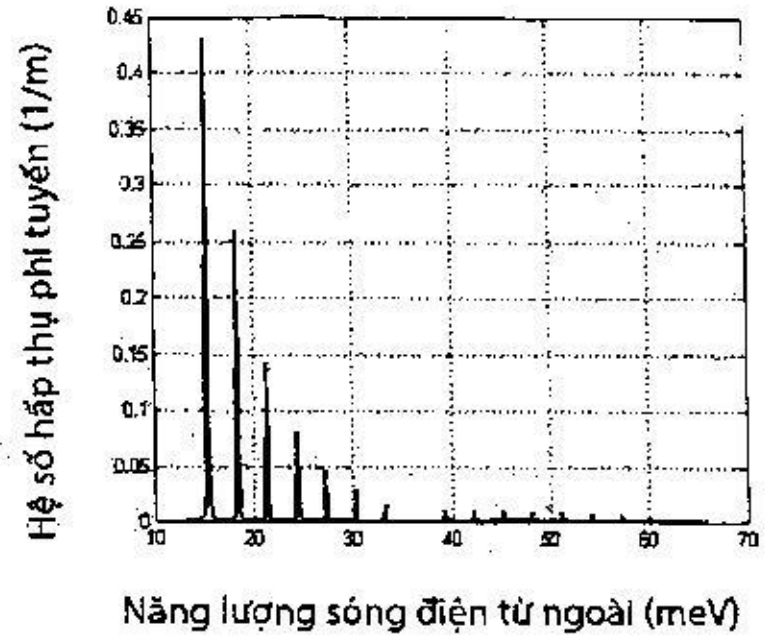
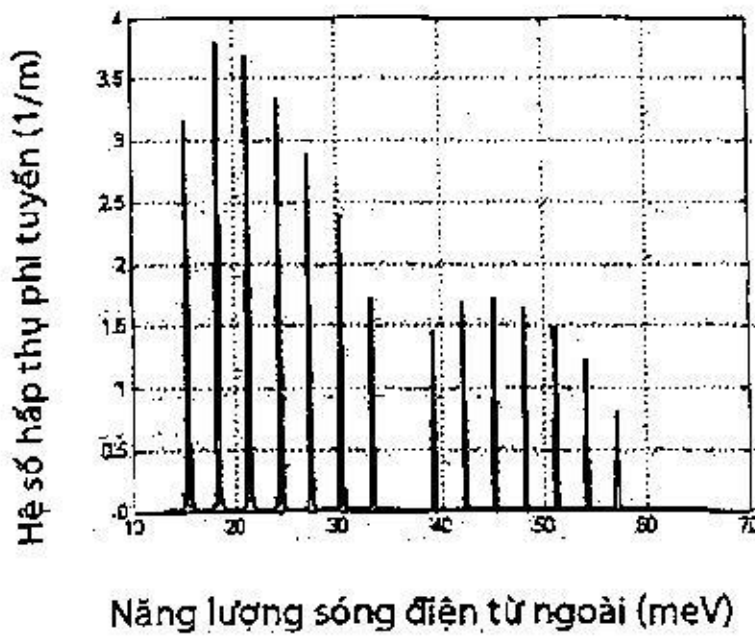


Hình 4.9. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 (phonon giam cầm, có từ trường)



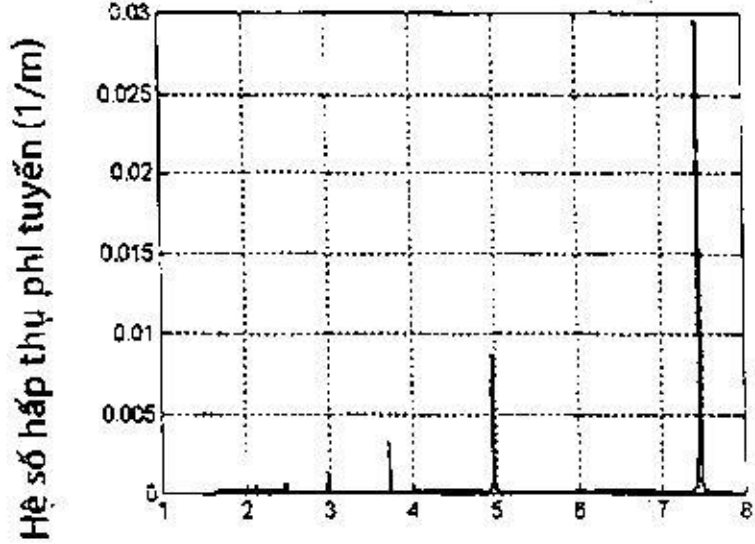
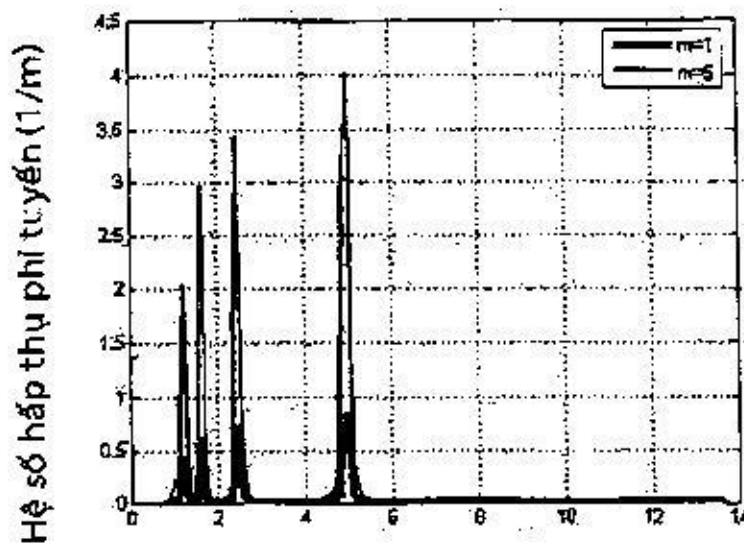
Hình 4.10. Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ α vào E_0 (phonon không giam cầm, có từ trường)

Đồ thị trên các hình 4.11 - 4.12 biểu diễn sự phụ thuộc mạnh của hệ số hấp thụ vào năng lượng sóng điện từ $\hbar\Omega$ trong trường hợp phonon giam cầm và không giam cầm. Cả hai đồ thị đều là những vạch phổ. Điều này có thể giải thích là do: khi có mặt từ trường, phổ năng lượng của điện tử là hoàn toàn gián đoạn theo biểu thức (4.10), vì thế mức Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ bị ràng buộc bởi điều kiện $\hbar\omega_p(n'-n) + \hbar\Omega_b(N'-N) + \hbar(\omega_o - \Omega) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 = 0$ trong hàm Delta-Dirac.



Hình 4.11. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, có từ trường)

Hình 4.12. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon không giam cầm, có từ trường)



Hình 4.13. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo Ω_B (phonon giam cầm, có từ trường)

Hình 4.14. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo Ω_B (phonon không giam cầm, có từ trường)

Đồ thị trên hình 4.11 xuất hiện các đỉnh cộng hưởng: có một đỉnh cộng hưởng cực đại và các đỉnh cộng hưởng thứ cấp. Ở trên hình 4.12, khi không có ảnh hưởng của phonon giam cầm, ta thấy giá trị α nhỏ hơn rất nhiều, các vạch phổ thấp dần khi năng lượng của trường sóng ngoài tăng đến giá trị lớn hơn năng lượng trung bình của phonon quang. Còn khi có ảnh hưởng của phonon giam cầm, các vạch phổ xuất hiện đều trên cả hai vùng năng lượng của trường sóng ngoài. Như vậy có sự gia tăng miền hấp thụ sóng điện từ khi kể đến sự giam cầm phonon.

Đồ thị trên các hình 4.13 - 4.14 biểu diễn sự phụ thuộc phi tuyến hệ số hấp thụ vào tần số cyclotron Ω_B (từ trường $\vec{B}$). Kết quả cho thấy α phụ thuộc phi tuyến vào Ω_B , vạch phổ gồm các đỉnh cực hẹp, giá trị α lại lớn hơn nhiều, cỡ 100 lần so với trường hợp phonon không giam cầm. Đồng thời khi chỉ số m tăng thì α cũng tăng rõ rệt.

4.2. ẢNH HƯỞNG CỦA PHONON GIAM CẦM LÊN SỰ HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH TRONG SIÊU MẠNG HỢP PHẦN

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong siêu mạng hợp phần [10].

4.2.1. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon trong siêu mạng hợp phần

Xét siêu mạng hợp phần khi có mặt trường bức xạ laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ đặt vuông góc với trục của siêu mạng (trục z) trong trường hợp không có từ trường ngoài. Hamiltonian của hệ điện tử-phonon giam cầm (chỉ xét trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang) biểu diễn thông qua toán tử sinh hủy hạt (sự lượng tử hóa lần 2), có dạng như (4.1-4.3) với phổ năng lượng và thừa số của điện tử trong trường hợp của siêu mạng hợp phần có dạng [55]:

$$I_{nn'}^m = \int_0^{s_d} \psi_n^*(z) \psi_{n'}(z) e^{iq_z z} dz \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 \vec{k}_\perp^2}{2m^*} - \Delta_n \cos k_\parallel d \quad (4.33)$$

Khi có mặt từ trường ngoài, ta coi trong siêu mạng hợp phần, từ trường $\vec{B}$ trục giao với rào thế của nó thì Hamiltonian của hệ điện tử-phonon quang trong hình thức luận lượng tử hóa lần hai được biểu diễn tương tự như (4.8). Trong đó phổ năng lượng của điện tử có dạng [14, 15, 51, 55, 56]:

$$\varepsilon_{n, N}^H(\vec{k}_\perp) = \hbar \Omega_B \left(N + \frac{1}{2} \right) - \Delta_n \cos k_\parallel d \quad (4.34)$$

4.2.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần

Tương tự như cách làm đối với bán dẫn khối và siêu mạng pha tạp, trong trường hợp không có từ trường ngoài, để xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt (hàm phân bố điện tử) $n_{n\vec{k}_\perp}(t) = \langle a_{n\vec{k}_\perp}^\dagger a_{n\vec{k}_\perp} \rangle$, theo biểu thức (4.11). Tiếp theo đó, sử dụng các biểu thức của hàm Hamiltonian trên, thực hiện các biến đổi đại số toán tử, sử dụng các tính chất của giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy của điện tử và phonon [7-9], [12, 13], cùng với các biến đổi toán học tương tự như đã làm ở mục 4.1, chúng ta thu được phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n\vec{k}_\perp}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar^2} \sum_{n', m, \vec{q}_\perp} |C_{m, \vec{q}_\perp}|^2 |I_{n, n'}^m|^2 \sum_{l, s=-\infty}^{\infty} J_l \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) J_s \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \exp[-i(s-l)\Omega] \int_{-\infty}^t dt' \times \\ & \times \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel^{n'} d - \cos k_\parallel^n d) - \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar \Omega + i\delta\hbar) (t-t') \right] \times \right. \\ & \times \left[n_{n, \vec{k}_\perp}(t') N_{m, \vec{q}_\perp} - n_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}(t') (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1) \right] + \\ & + \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel^{n'} d - \cos k_\parallel^n d) + \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar \Omega + i\delta\hbar) (t-t') \right] \times \\ & \times \left[n_{n, \vec{k}_\perp}(t') N_{m, \vec{q}_\perp} - n_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}(t') N_{m, \vec{q}_\perp} \right] - \\ & - \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel^{n'} d - \cos k_\parallel^n d) + \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar \Omega + i\delta\hbar) (t-t') \right] \times \\ & \times \left[n_{n', \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp}(t') N_{m, \vec{q}_\perp} - n_{n, \vec{k}_\perp}(t') (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1) \right] - \\ & - \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \varepsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel^{n'} d - \cos k_\parallel^n d) + \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - l\hbar \Omega + i\delta\hbar) (t-t') \right] \times \\ & \left. \left[n_{n', \vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp}(t') N_{m, \vec{q}_\perp} - n_{n, \vec{k}_\perp}(t') (N_{m, \vec{q}_\perp} + 1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Giải phương trình (4.35) bằng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp.

Chúng ta thu được hàm phân bố của điện tử không cân bằng trong siêu mạng hợp phần kể tới ảnh hưởng của phonon giam cầm:

$$\begin{aligned}
 n_{n,\vec{k}_\perp}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n',m,\vec{q}_\perp} |C_{m,\vec{q}_\perp}|^2 |I_{n,n'}^m|^2 \sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} J_k\left(\frac{e\vec{E}_o\vec{q}_\perp}{m^*\Omega^2}\right) J_{l+k}\left(\frac{e\vec{E}_o\vec{q}_\perp}{m^*\Omega^2}\right) \frac{\hbar}{l\Omega} \exp(-ik\Omega t) \times \\
 & \times \left\{ -\frac{\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} \bar{N}_{m,\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} (\bar{N}_{m,\vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_{n,\vec{k}_\perp} - \varepsilon_{n',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel d - \cos k'_\parallel d) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right. \\
 & - \frac{\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} (\bar{N}_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} \bar{N}_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_{n',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} - \varepsilon_{n,\vec{k}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel d - \cos k'_\parallel d) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} + \\
 & + \frac{\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} \bar{N}_{m,\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} (\bar{N}_{m,\vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_{n,\vec{k}_\perp} - \varepsilon_{n',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel d - \cos k'_\parallel d) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} + \\
 & \left. + \frac{\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} (\bar{N}_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} \bar{N}_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_{n,\vec{k}_\perp} - \varepsilon_{n',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} - \Delta_s (\cos k_\parallel d - \cos k'_\parallel d) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - l\hbar\Omega + i\delta\hbar} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

Như vậy, bằng phương pháp phương trình động lượng tử, chúng ta thu được biểu thức giải tích của hàm phân bố không cân bằng điện tử trong siêu mạng hợp phần có kể đến sự giam cầm của phonon. Biểu thức này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng hợp phần khi kể đến hiệu ứng phonon giam cầm trong mục 4.2.3.

Khi có mặt từ trường ngoài, tính toán tương tự như trường hợp vắng mặt từ trường, khi xây dựng phương trình động lượng tử, chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt (hàm phân bố điện tử) $n_{n,N,\vec{k}_\perp} = \left\langle a_{n,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,N,\vec{k}_\perp} \right\rangle_t$ và biểu thức

Hamiltonian của hệ khi có mặt từ trường ngoài. Sử dụng các tính chất giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy của điện tử và phonon, cùng các phép biến đổi toán học, giải phương trình vi phân, chúng ta thu nhận được phương trình động lượng tử cho điện tử trong siêu mạng hợp phần khi kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm, trường hợp có mặt từ trường ngoài như biểu thức (4.37) dưới đây:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{n,N,\bar{k}_1}(t)}{\partial t} = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,N,n',N',\bar{k}_1,\bar{q}_1} \sum_{m,\bar{q}_1} |C_{m,\bar{q}_1}|^2 |I_{n,n'}^m(q_z)|^2 \left| J_{N,N'} \left(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2 \right) \right|^2 \times \\
& \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l \left(\frac{e\bar{E}_o \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) J_{l+l} \left(\frac{e\bar{E}_o \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) \exp[-i(s-k)\Omega t] \int_{-\infty}^t dt \left\{ \left[n_{n,N,\bar{k}_1} (N_{\bar{q}_1} + 1) - n_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1} N_{m,\bar{q}_1} \right] \times \right. \\
& \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H - \varepsilon_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1}^H - \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t_1) \right] + \\
& + \left[n_{n,N,\bar{k}_1} N_{m,\bar{q}_1} - n_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1} (N_{m,\bar{q}_1} + 1) \right] \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H - \varepsilon_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1}^H + \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t_1) \right] \\
& - \left[n_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1} (N_{\bar{q}_1} + 1) - n_{n,N,\bar{k}_1} N_{m,\bar{q}_1} \right] \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H - \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t_1) \right] \\
& \left. - \left[n_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1} N_{m,\bar{q}_1} - n_{n,N,\bar{k}_1} (N_{m,\bar{q}_1} + 1) \right] \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H + \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t_1) \right] \right\}
\end{aligned}
\tag{4.37}$$

Giải phương trình trên, chúng ta sẽ tính được mật độ dòng, là căn cứ để tìm được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ sóng điện từ:

$$\begin{aligned}
n_{n,N,\bar{k}_1}(t) = & -\frac{1}{\hbar} \sum_{n,N,n',N',\bar{k}_1,\bar{q}_1} \sum_{m,\bar{q}_1} |C_{m,\bar{q}_1}|^2 |I_{n,n'}^m(q_z)|^2 \left| J_{N,N'} \left(\frac{1}{2} a_c^2 q_{\perp}^2 \right) \right|^2 \\
& \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l\Omega} e^{(-i\Omega t)} J_l \left(\frac{e\bar{E}_o \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) J_{l+l} \left(\frac{e\bar{E}_o \bar{q}_{\perp}}{m^* \Omega^2} \right) \times \\
& \left\{ \frac{\bar{n}_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1} N_{m,\bar{q}_1} - \bar{n}_{n,N,\bar{k}_1} (N_{m,\bar{q}_1} + 1)}{\varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H - \varepsilon_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1}^H - \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta} + \frac{\bar{n}_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1} (N_{m,\bar{q}_1} + 1) - \bar{n}_{n,N,\bar{k}_1} N_{m,\bar{q}_1}}{\varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H - \varepsilon_{n',N',\bar{k}_1-\bar{q}_1}^H + \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta} \right. \\
& \left. - \frac{\bar{n}_{n,N,\bar{k}_1} N_{m,\bar{q}_1} - \bar{n}_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1} (N_{m,\bar{q}_1} + 1)}{\varepsilon_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H - \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta} - \frac{\bar{n}_{n,N,\bar{k}_1} (N_{m,\bar{q}_1} + 1) - \bar{n}_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1} N_{m,\bar{q}_1}}{\varepsilon_{n',N',\bar{k}_1+\bar{q}_1}^H - \varepsilon_{n,N,\bar{k}_1}^H + \hbar\omega_{m,\bar{q}_1} - k\hbar\Omega + i\hbar\delta} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.38}$$

Biểu thức (4.38) là hàm phân bố điện tử không cân bằng khi hệ đặt trong từ trường ngoài khi tính đến sự giam cầm phonon. Biểu thức này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi có từ trường dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm ở mục 4.2.3 dưới đây.

4.2.3. Hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi có ảnh hưởng của phonon giam cầm

Để tìm biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi kể đến sự giam cầm của phonon trong trường hợp vắng mặt từ trường ngoài, trước hết, chúng ta tìm biểu thức tường minh của mật độ dòng hạt tải cho trường hợp này, tiếp theo áp dụng công thức tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh để tìm biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến. Chúng ta chỉ xét phần thực và giới hạn hấp thụ một photon. Thực hiện các phép đổi biến như đã trình bày ở phần tính toán trong bán dẫn khối và siêu mạng pha tạp. Từ biểu thức của hàm phân bố không cân bằng của điện tử, với giả thiết khí điện tử là không suy biến và tán xạ điện tử - phonon quang chiếm ưu thế, ta thiết lập được biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần có kể đến sự giam cầm của phonon là:

$$\alpha = \frac{16\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{\epsilon_0 c \sqrt{\chi_\infty} E_0^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{\substack{m, \vec{q}_\perp, \vec{k}_\perp \\ n, n', \vec{k}_\perp}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k J_k^2}{\vec{q}_\perp^2 + \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2} \left| I_{n, n'}^m \right|^2 \\ \times (\bar{n}_{n, \vec{k}_\perp} - \bar{n}_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp}) [\delta(\epsilon_{n', \vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp} - \epsilon_{n, \vec{k}_\perp} - \Delta_n (\cos k_{||}^{n'} d - \cos k_{||}^n d) + \hbar \omega_{m, \vec{q}_\perp} - k \hbar \Omega)] \\ + [\omega_{m, \vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m, \vec{q}_\perp}] \quad (4.39)$$

Trong biểu thức (5.39), cũng cho thấy, khác với siêu mạng hợp phần trường hợp không kể đến sự giam cầm phonon, hệ số hấp thụ sóng điện từ trong siêu mạng hợp phần không chỉ phụ thuộc phi tuyến vào cường độ điện trường, các đại lượng đặc trưng cho sự giam giữ điện tử n, n' và các tham số đặc trưng cho siêu mạng hợp phần như chu kỳ siêu mạng d , độ rộng mini vùng Δ_n mà còn phụ thuộc vào chỉ số đặc trưng cho sự giam giữ phonon. Tiếp theo, chúng ta xét hai giới hạn:

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Trường hợp này, tần số sóng điện từ phải thỏa mãn điều kiện $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m,\bar{q}_\perp}| \ll \bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon}$ là năng lượng trung bình của điện tử tự do trong chuyển động nhiệt). Xét trường hợp hấp thụ một photon và để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong công thức (4.39) ta dựa vào hàm phân bố cân bằng của điện tử theo phân bố Boltzmann (xét khí điện tử không suy biến), thực hiện các phép biến đổi tương tự như với siêu mạng pha tạp. Ta thu được biểu thức giải tích cho hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\pi e^4 n_o (k_B T)^2}{2c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 \hbar^4} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{m,n',n} |J_{n,n'}^m| \times (\exp[\frac{1}{k_B T} (\Omega - \omega_o) \hbar] - 1) \\ & \times \exp[-\frac{1}{k_B T} (\frac{\pi^2 \hbar^2 n'^2}{2m^* d^2} - \Delta_n \cos p_{||}^{n'} d)] \times \exp[-\frac{1}{k_B T} (B + |B|)] \\ & \times \{1 + \frac{3e^2 \bar{E}_o^2 k_B T}{8m^* \hbar^2 \Omega^4} (1 + \frac{1}{2k_B T} B)\} + [\omega_o \rightarrow -\omega_o] \end{aligned} \quad (4.40)$$

ở đây,

$$B = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* d^2} (n'^2 - n^2) - \Delta_n (\cos p_{||}^{n'} d - \cos p_{||}^n d) + \hbar\omega_o - \hbar\Omega + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2$$

Trong trường hợp giới hạn, khi cho số lượng tử m tiến tới không ($m = 0$), thì hệ số hấp thụ phi tuyến trường hợp này trở về biểu thức của nó trong trường hợp kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm [55]; nếu tiếp tục cho cường độ điện trường E_o tiến tới 0, thì ta sẽ thu được kết quả hệ số hấp thụ trong trường hợp tuyến tính. Điều này khẳng định sự đúng đắn trong các tính toán lý thuyết của chúng ta khi xây dựng biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh có kể đến hiệu ứng giam cầm của phonon trong siêu mạng hợp phần.

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này, để có quá trình hấp thụ sóng điện từ mạnh trong siêu mạng hợp phần khi kể đến sự giam cầm của phonon thì tần số sóng điện từ đủ lớn sao cho điều kiện $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m\vec{q}_1}| \gg \varepsilon$ phải thỏa mãn. Tính toán tương tự như trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, chúng ta thu được biểu thức hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi xét đến sự giam cầm của phonon cho trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

$$\alpha = \frac{2\pi^2 e^4 n_o (k_B T)^2}{\varepsilon_o c \sqrt{\chi_\infty} m^* \hbar^2 \Omega^3} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{m,n,n'} |I_{n,n'}^m|^2 \times \left\{ 1 + \frac{3e^2 E_o^2}{16m^* \Omega^4} B \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{\hbar}{k_B T} (\Omega - \omega_o) \right] \right\} \times \frac{2m^* B^{3/2}}{2m^* B + \left(\frac{m\pi\hbar}{d} \right)^2} \quad (4.41)$$

Tương tự như trường hợp hấp thụ gần ngưỡng, khi chúng ta xét trường hợp giới hạn cho số lượng tử m tiến tới không thì biểu thức (4.41) trở về biểu thức của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi không kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm trong [55].

Khi có mặt từ trường ngoài, thực hiện các tính toán tương tự như trên, biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong siêu mạng hợp phần khi có mặt của từ trường dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm. Sau đó thực hiện các phép toán sử dụng tính chất của hàm Lagrange, tính tích phân xét trường hợp điện tử không suy biến

$$\bar{n}_{n,N,\vec{k}_1} = n_o \exp\left[\frac{-1}{k_B T} \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_1) \right], \text{ trong trường hợp hấp thụ một photon.}$$

Ta sẽ thu được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần khi có mặt từ trường ngoài dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm như sau:

$$\alpha = \frac{e^2 \Omega_B^2 k_B T n_o^*}{2c \sqrt{X_\infty} \epsilon_o^2 \pi \Omega^3 a_c^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{n, N, n', N'} \sum_m |I_{n, n'}^m(q_z)|^2 \left\{ 1 + \frac{3e^2 E_o^2}{16a_c^2 m^2 \Omega^4} (N + N' + 1) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(N + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_B - \Delta_s \cos k_1^n d \right] - \exp \left[-\frac{1}{k_B T} \left(N' + \frac{1}{2} \right) \hbar \Omega_B - \Delta_s \cos k_1^{n'} d \right] \right\}$$

$$\times \frac{\hbar \sqrt{A_1 |M|}}{|M| \left[\hbar \Omega - \hbar \omega_o + (N' - N) \hbar \Omega_B - \Delta_s (\cos k_1^{n'} d - \cos k_1^n d) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{d} \right)^2 \right] + \hbar^2 A_1}$$

$$+ [\omega_o \rightarrow -\omega_o]$$

(4.42)

ở đây, $M = N - N'$; $A_1 = N_o \sum_{n, n', q_z} \frac{e^2 \omega_o}{2\pi d \hbar^2} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right)$;

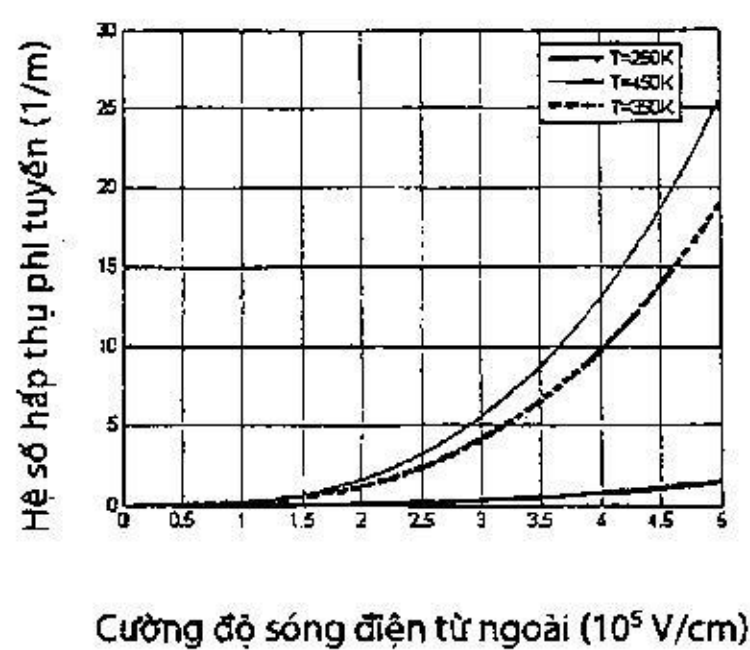
Như vậy, từ phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm, chúng ta đã thiết lập được biểu thức giải tích của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong siêu mạng hợp phần trường hợp tán xạ điện tử-phonon quang khi có từ trường ngoài dưới ảnh hưởng của phonon giam cầm. Nhìn vào biểu thức (4.41) ta thấy hệ số α không những phụ thuộc phi tuyến vào cường độ $|\vec{E}_o|$ và năng lượng $\hbar \Omega$ của trường bức xạ laser và nhiệt độ T của hệ, mà còn phụ thuộc vào tần số cyclotron Ω_B (từ trường $\vec{B}$). Đặc biệt, khi $\vec{E}_o \rightarrow 0$, số hạng thứ hai trong (4.42) bằng 0, thì hệ số hấp thụ phi tuyến trở thành tuyến tính như đã khảo sát bằng phương pháp Kubo-Mori. Khi không kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm tức kết quả có thể thu nhận được khi cho $m \rightarrow 0$ trong biểu thức (4.41).

4.2.4. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

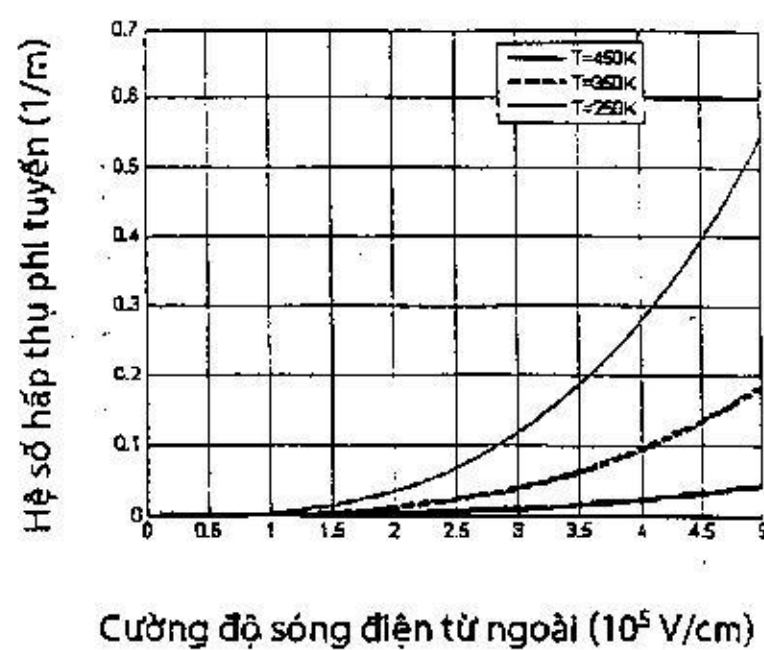
Để thấy rõ kết quả tính toán lý thuyết ở trên về ảnh hưởng của hiệu ứng giam cầm phonon lên hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh, trong mục này giới thiệu kết quả khảo sát số, vẽ đồ thị sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số của hệ, của siêu mạng hợp phần và chỉ số giam cầm

lượng tử m đối với siêu mạng hợp phần $\text{GaAsAl}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$. Các tham số để tính toán $\chi_0 = 12,9$; $\chi_\infty = 10,9$; $n_0 = 10^{23}$, $n_D = 10^{23}$, $m = 0,067$; m_0 khối lượng của điện tử tự do, $\hbar\omega_0 = 36,25\text{meV}$ và $\Omega = 2.10^{14}\text{ s}^{-1}$ (trường hợp hấp thụ gần ngưỡng), $\Omega = 2.10^{16}\text{ s}^{-1}$ (trường hợp hấp thụ xa ngưỡng), $d_A = 118.10^{-10}\text{ m}$, $d_B = 16.10^{-10}\text{ m}$.

Thực hiện tính số và vẽ đồ thị cho hệ số hấp thụ phi tuyến trong trường hợp không có từ trường ngoài, kết quả thu được là:

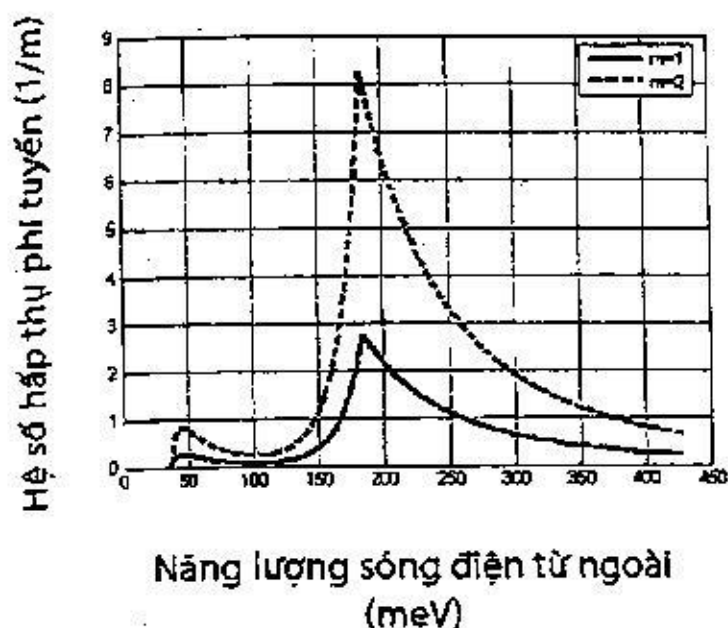


Hình 4.15. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 và T (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

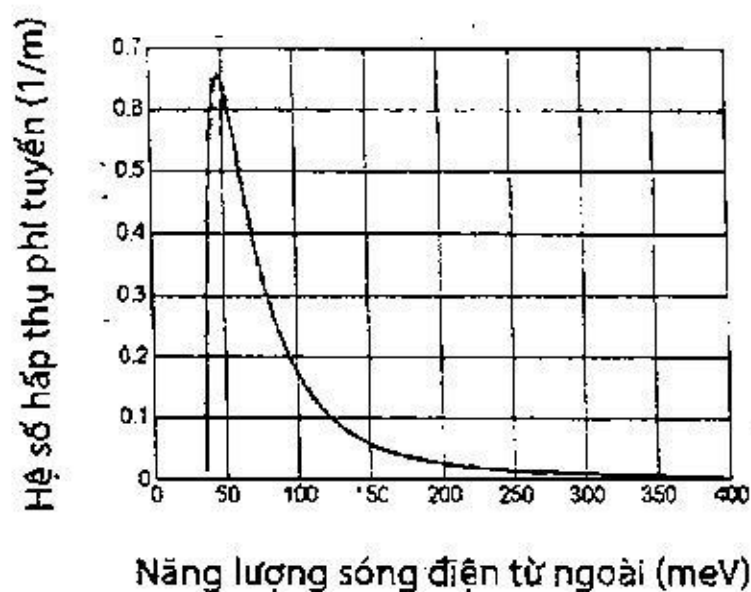


Hình 4.16. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 và T (phonon không giam, hấp thụ gần ngưỡng)

Đồ thị trên các hình 4.15 - 4.16 chỉ ra rằng hệ số hấp thụ phi tuyến phụ thuộc rất mạnh vào cường độ E_0 của sóng điện từ ngoài, sự phụ thuộc này là không tuyến tính trong cả hai trường hợp tính tới ảnh hưởng của phonon giam cầm và không tính tới ảnh hưởng của phonon giam cầm. Hệ số hấp thụ α tăng phi tuyến khi E_0 tăng. Trong trường hợp có kể đến phonon giam cầm, hệ số hấp thụ phi tuyến tăng nhanh hơn theo cường độ sóng điện từ ngoài khi nhiệt độ của hệ càng cao, lớn hơn so với trường hợp phonon không giam cầm khoảng 50 lần.

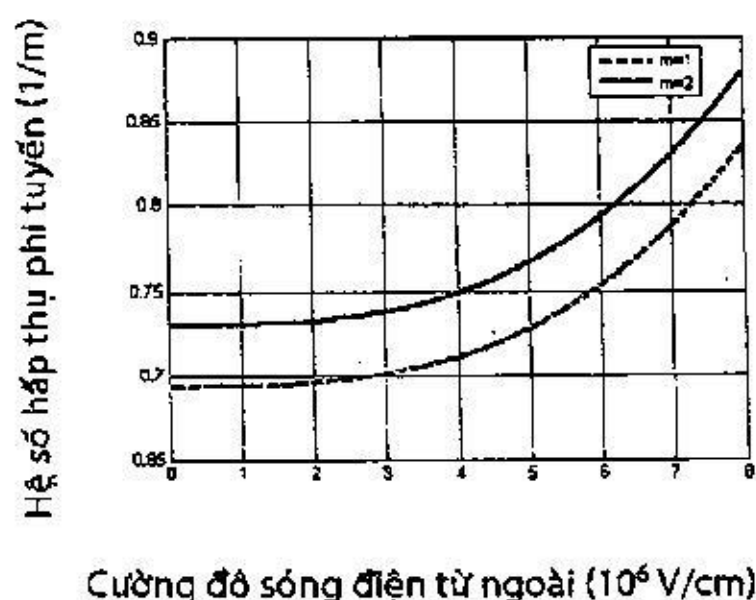


Hình 4.17. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

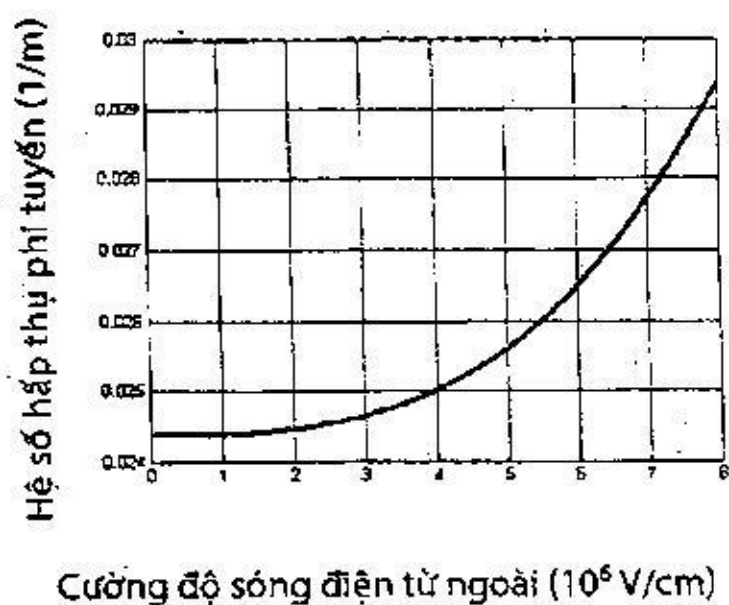


Hình 4.18. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

Đồ thị trên các hình 4.17 - 4.18, cho thấy hệ số hấp thụ phi tuyến phụ thuộc vào năng lượng của sóng điện từ ngoài $\hbar\Omega$ rất mạnh. Đặc biệt khi kể tới ảnh hưởng của phonon giam cầm, xuất hiện hai đỉnh cộng hưởng tại vị trí $\Omega > \omega$ và $\Omega = \omega$ trong khi đó chỉ có một đỉnh cộng hưởng trong trường hợp không tính đến ảnh hưởng của phonon giam cầm [55].

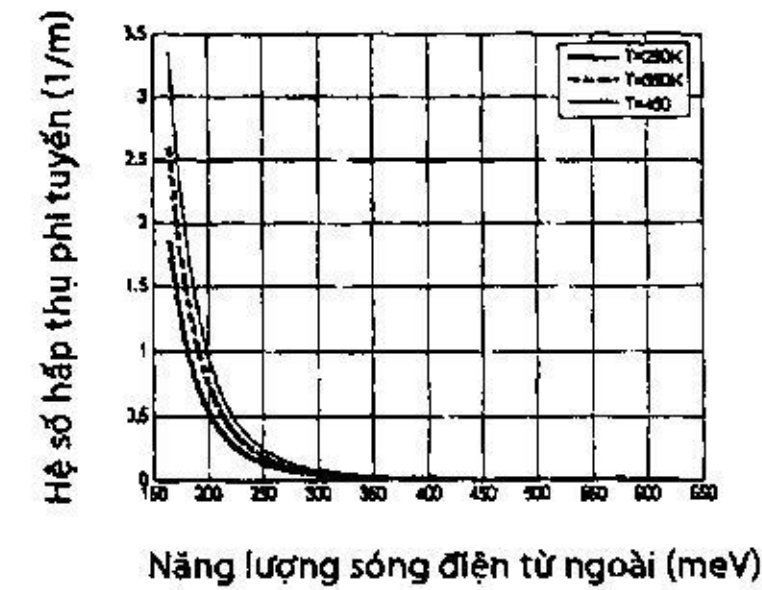


Hình 4.19. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 và m (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

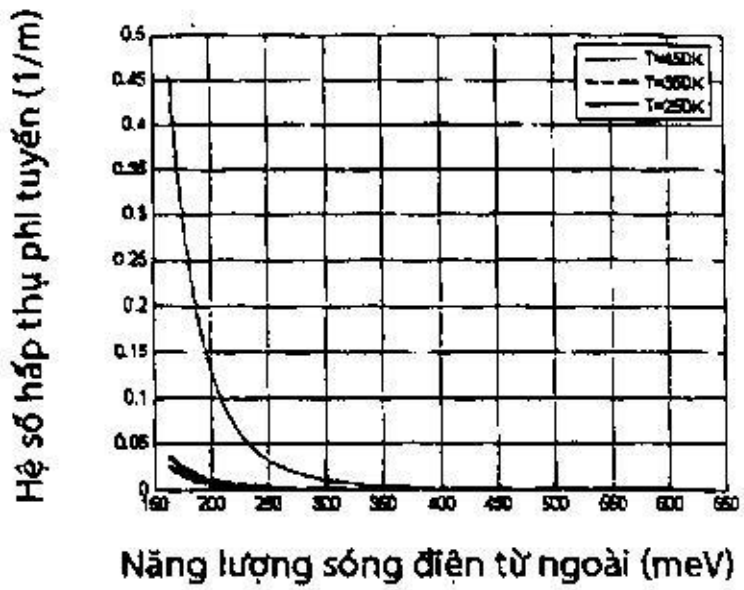


Hình 4.20. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 (phonon không giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

Đồ thị trên các hình 4.19-4.20, cho thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh trong siêu mạng hợp phần vào cường độ điện trường E_0 của điện trường ngoài trong cả hai trường hợp tính tới ảnh hưởng của phonon giam cầm và không tính tới ảnh hưởng của phonon giam cầm. Hệ số hấp thụ tăng tương đối nhanh theo E_0 ; tăng theo giá trị của chỉ số giam cầm phonon.



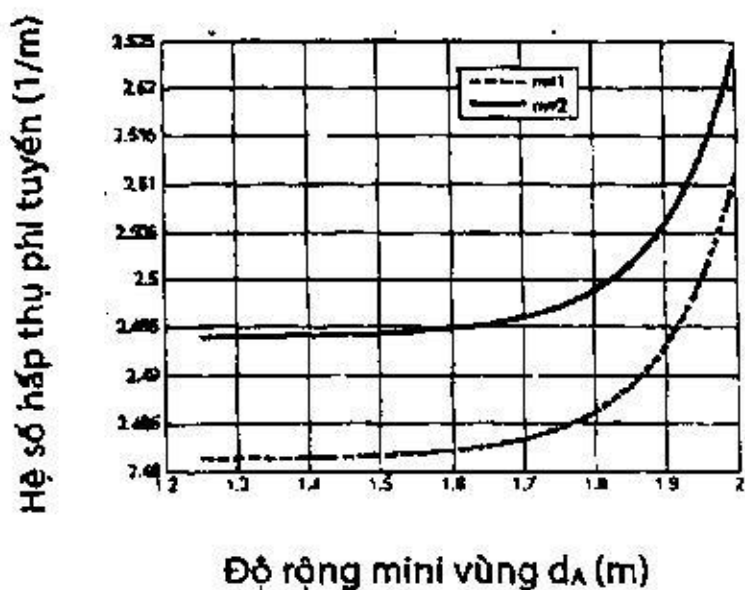
Hình 4.21. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



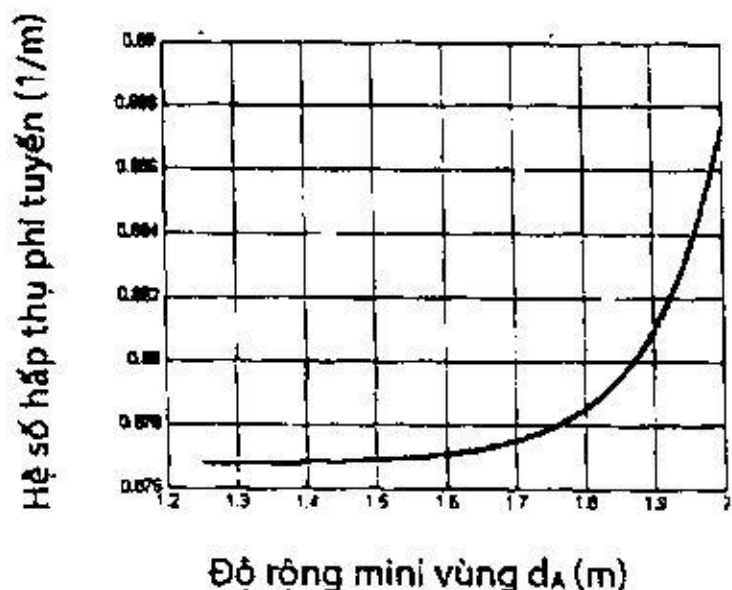
Hình 4.22. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon không giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

Đồ thị trên các hình 4.21-4.22, chỉ ra rằng hệ số hấp thụ giảm nhanh khi năng lượng của sóng điện từ tăng, đồng thời cũng phụ thuộc vào nhiệt độ. Tuy nhiên, trong trường hợp phonon giam cầm, khi nhiệt độ thay đổi, hệ số hấp thụ thay đổi chậm hơn so với trường hợp không giam cầm. Giá trị của hệ số hấp thụ khi kể đến ảnh hưởng của sự giam giữ phonon lớn hơn cỡ chục lần.

Đồ thị trên các hình 4.23-4.24, chỉ ra rằng hệ số hấp thụ tăng nhanh khi độ rộng d_A của mini vùng tăng, đồng thời trong trường hợp phonon giam cầm thì hệ số hấp thụ cũng phụ thuộc mạnh vào số lượng tử m đặc trưng cho sự giam cầm của phonon, độ lớn hệ số hấp thụ tăng lên khi số lượng tử m tăng.



Hình 4.23. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo d_A (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



Hình 4.24. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo d_A (phonon không giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

Một điểm chung cho các kết quả đồ thị thu được trên các hình 4.15 - 4.24 đó là, hệ số hấp thụ phi tuyến cho cả trường hợp gần ngưỡng và xa ngưỡng khi kể đến ảnh hưởng của sự giam cầm phonon trong siêu mạng hợp phần đều lớn hơn hàng chục lần khi không kể đến ảnh hưởng của phonon giam cầm. Độ lớn hệ số hấp thụ phi tuyến trong trường hợp gần ngưỡng lớn hơn rất nhiều so với trường hợp xa ngưỡng.

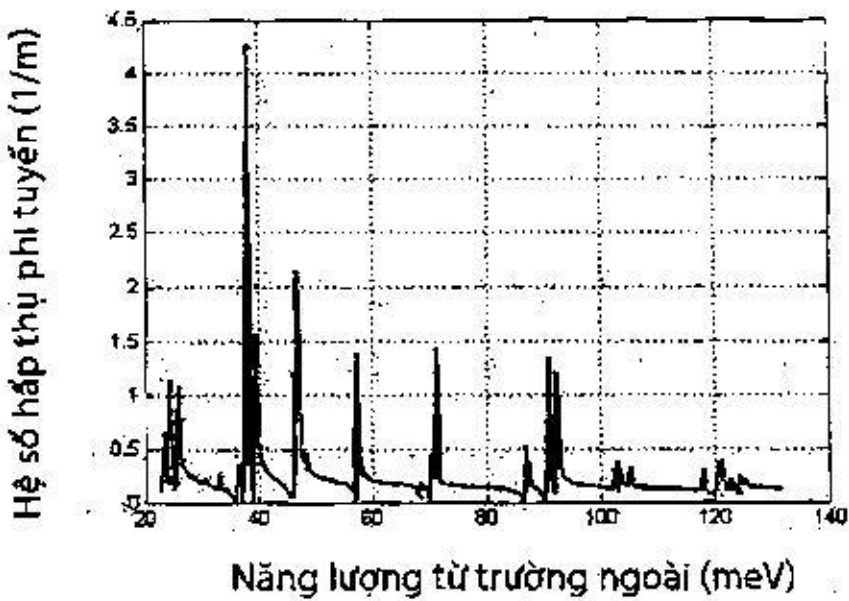
Trong trường hợp có mặt từ trường ngoài, kết quả tính số và vẽ đồ thị cho hệ số hấp thụ phi tuyến cho thấy:

Đồ thị trên các hình 4.25 - 4.26, biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến và tuyến tính sóng điện từ trong siêu mạng hợp phần vào năng lượng của sóng điện từ ngoài khi có mặt từ trường ngoài trường hợp phonon giam cầm và không giam cầm cho trường hợp tán xạ điện tử - phonon quang. Cả hai hình đều chỉ ra sự phụ thuộc mạnh vào năng lượng sóng điện từ ngoài của hệ số hấp thụ, thể hiện ở sự xuất hiện nhiều đỉnh cộng hưởng. Tuy nhiên, có thể thấy sự khác biệt ở mật độ đỉnh cộng hưởng của trường hợp phonon giam cầm nhỏ hơn, nhưng các đỉnh phủ đều toàn vùng năng lượng được khảo sát của trường sóng ngoài. Đối với trường hợp không giam cầm, đỉnh cộng hưởng chính đạt được tại vị trí có $\hbar\Omega$ cỡ 36meV, trong khi vị trí này có $\hbar\Omega$ cỡ 40meV. Như vậy có sự dịch chuyển vị trí đỉnh cộng hưởng chính, giá trị của

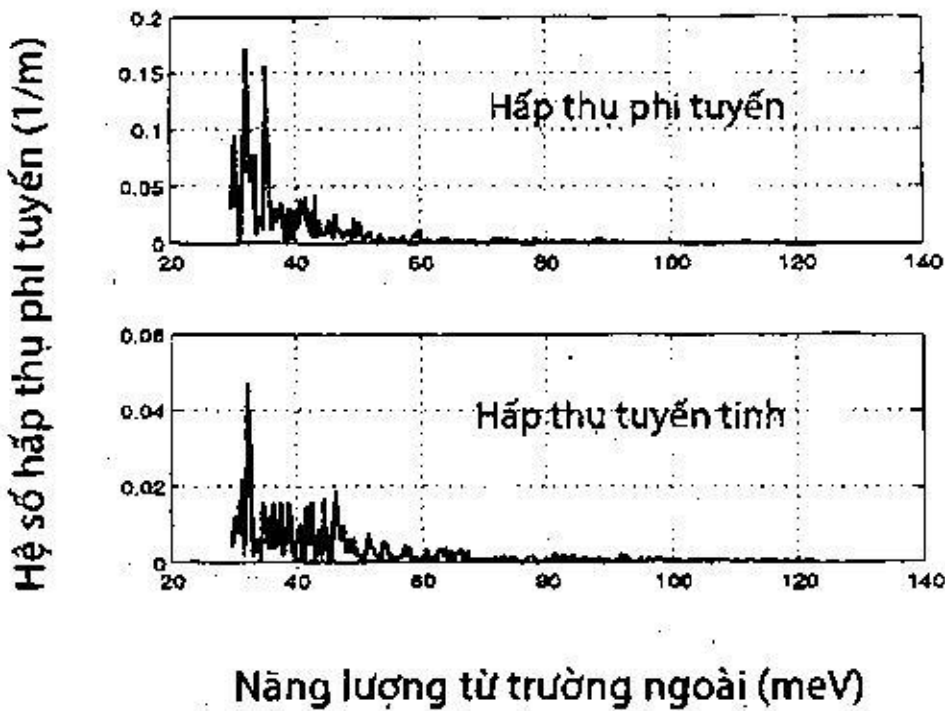
đỉnh cộng hưởng chính trong trường hợp phonon giam cầm lớn hơn cỡ 20 lần so với trường hợp phonon không giam cầm.

Cả hai đồ thị trên các hình 4.25 và 4.26 đều là những vạch phổ. Điều này có thể giải thích: Khi có mặt từ trường, phổ năng lượng của điện tử là hoàn toàn gián đoạn, vì thế mức Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ bị ràng buộc bởi điều kiện

$$(n^2-n^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2m^*d^2}+\hbar\Omega_B(N'-N)+\hbar(\omega_0-\Omega)+\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2=0 \text{ trong hàm Delta-Dirac.}$$

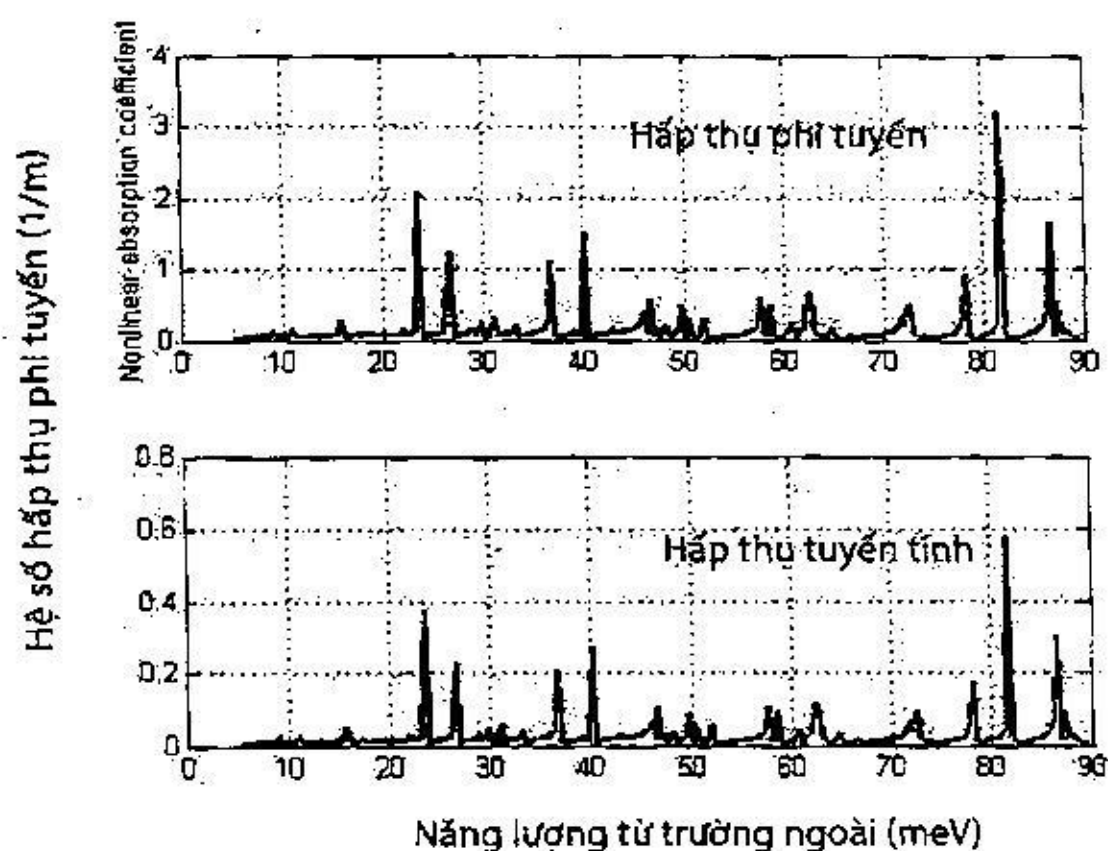


Hình 4.25. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, có từ trường)

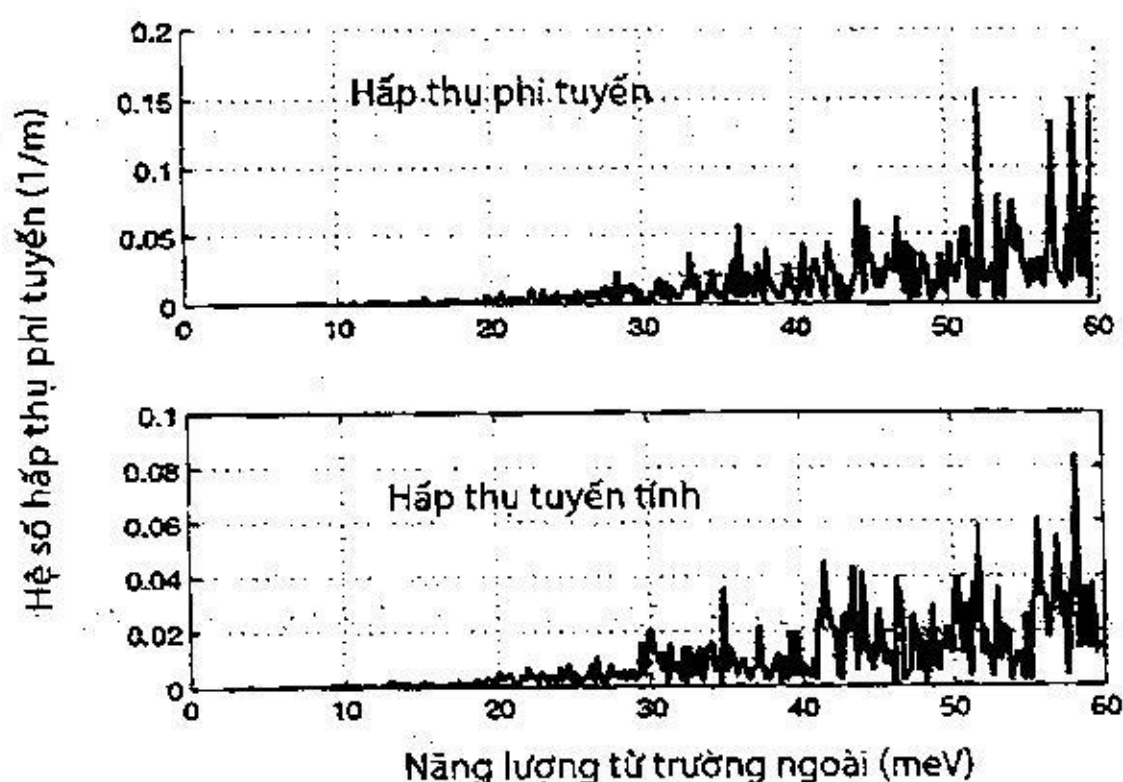


Hình 4.26. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon không giam cầm, có từ trường)

Trong khi đó đối với bán dẫn khối các chỉ số Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ là tùy ý. Điều này lý giải tại sao đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số của hệ không liên tục mà bị gián đoạn như kết quả trong trường hợp không kể đến phonon giam cầm [55].



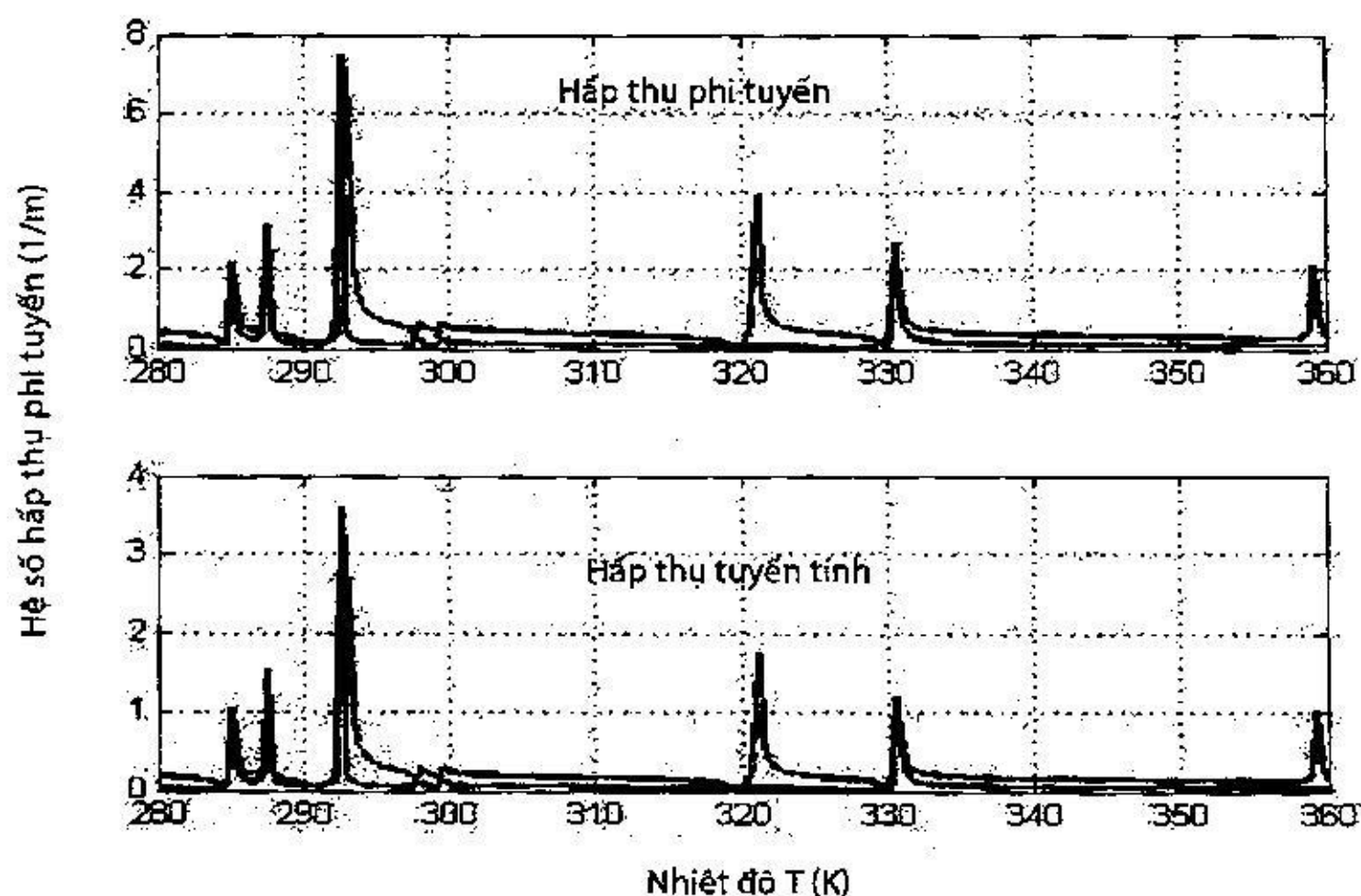
Hình 4.27. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega_B$ (phonon giam cầm, có từ trường)



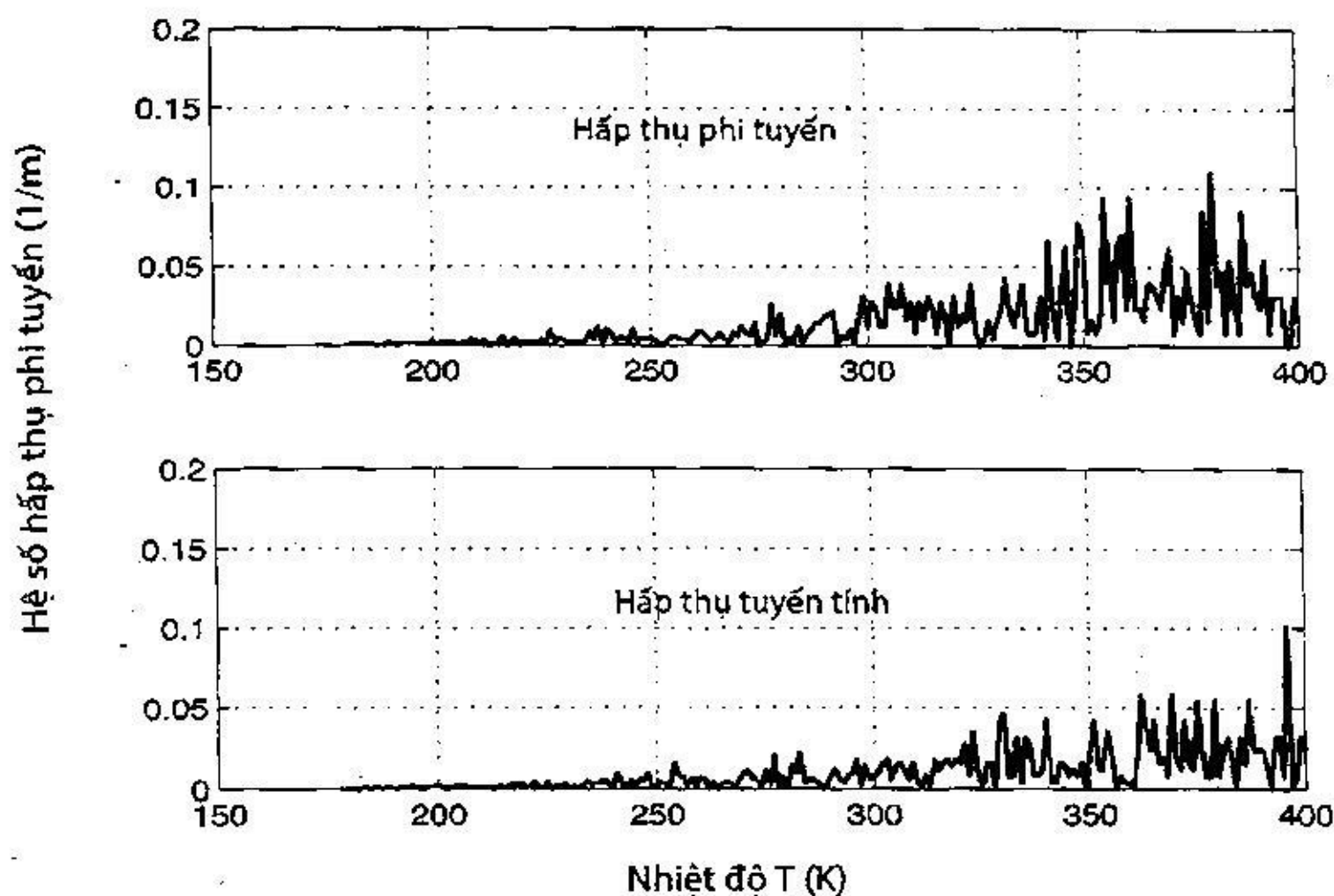
Hình 4.28. Khảo sát α theo $\hbar\Omega_B$ (phonon không giam cầm, có từ trường)

Đồ thị trên các hình 4.27-4.28, cũng chỉ cho chúng ta thấy kết quả tương tự, sự phụ thuộc rõ nét của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh vào năng lượng từ trường ngoài cũng có dạng các vạch phổ. Trong trường hợp kể tới sự ảnh hưởng của phonon giam cầm, mật độ vạch cộng hưởng nhỏ hơn nhưng giá trị của các đỉnh cộng hưởng lại lớn hơn.

Đồ thị trên các hình 4.29-4.30, biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến và tuyến tính sóng điện từ vào nhiệt độ. Hệ số hấp thụ chịu ảnh hưởng mạnh của sự giam giữ phonon thông qua sự khác biệt rõ ràng về vạch phổ. Trường hợp có sự ảnh hưởng của sự giam giữ phonon, mật độ vạch phổ tuy nhỏ hơn nhưng giá trị của các đỉnh hấp thụ lớn hơn và dễ nhận biết hơn so với trường hợp không kể đến sự giam cầm phonon. Đặc biệt, trong trường hợp có sự giam giữ phonon, khi chỉ số lượng tử m thay đổi làm dịch chuyển vị trí của các đỉnh cộng hưởng (hình 4.29).



Hình 4.29. Khảo sát α theo T với m khác nhau (phonon giam cầm, có từ trường)



Hình 4.30. Khảo sát α theo T (phonon không giam cầm, có từ trường)

4.3. ẢNH HƯỞNG CỦA PHONON GIAM CẦM LÊN SỰ HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỬ MẠNH TRONG HỐ LƯỢNG TỬ

Trong phần này, sẽ trình bày ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện tử mạnh trong hố lượng tử [10].

4.3.1. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon tương tác trong hố lượng tử

Trường hợp vắng mặt từ trường ngoài:

Mật độ điện tử và phổ năng lượng của điện tử trong hố lượng tử bị lượng tử hóa. Gọi z là trục lượng tử hóa, Hamiltonian tương tác điện tử giam cầm - phonon giam cầm trong hố lượng tử khi có trường sóng điện tử ngoài, trường hợp vắng mặt từ trường được viết dưới dạng (2.11), nhưng với $C_{m,\vec{q}_1}$ là hằng số tương tác điện tử giam cầm-phonon quang giam cầm:

$$|C_{m\vec{q}_1}|^2 = \frac{2\pi e^2 \hbar \omega_{m\vec{q}_1}}{\epsilon_0 V} \left(\frac{1}{X_\infty} - \frac{1}{X_0} \right) \frac{1}{q_1^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2} \quad (4.43)$$

Thừa số dạng điện tử trong hố lượng tử có thể viết [44]:

$$I_{n,n'}^m = \frac{2}{L} \int_0^L \left(\eta(m) \cos \frac{m\pi z}{L} + \eta(m+1) \sin \frac{m\pi z}{L} \right) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n'\pi z}{L}\right) dz \quad (4.44)$$

trong đó L là độ rộng của hố lượng tử. Phổ năng lượng của điện tử xác định bởi công thức:

$$\mathcal{E}_n(\vec{k}_\perp) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_\perp^2 + k_z^2) \quad (4.45)$$

với $k_z = n\pi / L$ và n là các số lượng tử đặc trưng cho sự giam cầm của điện tử, m^* là khối lượng hiệu dụng của điện tử giam cầm trong hố lượng tử.

Trường hợp có mặt từ trường ngoài:

Khi có mặt từ trường ngoài $\vec{B}$, Hamiltonian của hệ điện tử giam cầm-phonon quang giam cầm trong biểu diễn lượng tử hóa lần thứ hai dưới tác dụng của trường laser $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ đặt vuông góc với từ trường $\vec{B}$ có thể viết dưới dạng biểu thức (2.111), nhưng với phổ năng lượng của điện tử bị lượng tử hóa hoàn toàn, được xác định bởi biểu thức:

$$\mathcal{E}_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) = (N + \frac{1}{2})\hbar\Omega_B + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m^*L^2} \quad (4.46)$$

4.3.2. Phương trình động lượng tử cho điện tử trong hố lượng tử

Để xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong hố lượng tử, chúng ta sử dụng phương trình động lượng tử tổng

quát cho toán tử số hạt (hàm phân bố điện tử) $n_{n\vec{k}_\perp} = \langle a_{n\vec{k}_\perp}^\dagger a_{n\vec{k}_\perp} \rangle$, [3].

Bằng việc sử dụng các tính chất của giao hoán tử giữa các toán tử sinh, hủy điện tử và phonon, chúng ta thu được phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong hố lượng tử khi kể đến sự giam cầm phonon trường hợp không có mặt trường ngoài:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n\vec{k}_\perp}(t)}{\partial t} = & \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{s, k \rightarrow \infty} J_s \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) J_k \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) e^{-i(s-k)\Omega t} \sum_{m, \vec{q}_\perp, n'} |I_{nn'}^m|^2 |C_{m\vec{q}_\perp}|^2 \int_{-\infty}^t dt' \times \\ & \times \left\{ \left[n_{n\vec{k}_\perp}(t') N_{m\vec{q}_\perp} - n_{n'\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') (1 + N_{m\vec{q}_\perp}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp) - k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} + i\delta \right) (t-t') \right] + \right. \\ & + \left[n_{n\vec{k}_\perp}(t') (1 + N_{m\vec{q}_\perp}) - n_{n'\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') N_{m\vec{q}_\perp} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega + i\delta \right) (t-t') \right] - \\ & - \left[n_{n'\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp}(t') N_{m\vec{q}_\perp} - n_{n\vec{k}_\perp}(t') (1 + N_{m\vec{q}_\perp}) \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp - \vec{q}) - \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega + i\delta \right) (t-t') \right] + \\ & \left. + \left[-n_{n'\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp}(t') (1 + N_{m\vec{q}_\perp}) + n_{n\vec{k}_\perp}(t') N_{m\vec{q}_\perp} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp - \vec{q}) + \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega + i\delta \right) (t-t') \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Giống như trường hợp của bán dẫn khối và siêu mạng, để giải phương trình (4.47) chúng ta sử dụng phương pháp gần đúng lặp liên tiếp [48]. Khi đó, tích phân hai vế của phương trình (4.47) theo t , tiếp theo lấy tích phân hai vế theo t' , ta được hàm phân bố không cân bằng của điện tử giam cầm trong hố lượng tử trường hợp này theo công thức dưới đây:

$$\begin{aligned} n_{n\vec{k}_\perp}(t) = & \frac{-1}{\hbar} \sum_{m, \vec{q}_\perp, n'} |C_{m\vec{q}_\perp}|^2 |I_{nn'}^m|^2 \sum_{k, j \rightarrow \infty} J_k \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) J_{k+j} \left(\frac{\lambda}{\Omega} \right) e^{-i\Omega t} \frac{1}{i\Omega} \times \\ & \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n\vec{k}_\perp}(t_1) N_{m\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n'\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t_1) (1 + N_{m\vec{q}_\perp})}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp) - k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} + i\delta} - \frac{\bar{n}_{n\vec{k}_\perp}(t_1) (1 + N_{m\vec{q}_\perp}) - \bar{n}_{n'\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t_1) N_{m\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega + i\delta} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{n}_{n'\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp}(t_1) N_{m\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n\vec{k}_\perp}(t_1) (1 + N_{m\vec{q}_\perp})}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp - \vec{q}) - \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega + i\delta} + \frac{\bar{n}_{n'\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp}(t_1) (1 + N_{m\vec{q}_\perp}) - \bar{n}_{n\vec{k}_\perp}(t_1) N_{m\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_n(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp - \vec{q}) + \hbar\omega_{m\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega + i\delta} \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Phương trình này là cơ sở để tính hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử trong mục 4.3.3 dưới đây.

Khi có mặt từ trường ngoài, tương tự như trong siêu mạng, bằng việc sử dụng các hệ thức phản giao hoán và đại số toán tử, thực hiện các phép tính toán cần thiết, chúng ta thu nhận được phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong hố lượng tử khi có mặt từ trường ngoài và có kể đến sự giam giữ phonon:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t)}{\partial t} &= \left\langle a_{n,t,N,\vec{k}_\perp}^+ a_{n,t,N,\vec{k}_\perp}, H_B \right\rangle_t = \\
 &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n,N,\vec{k}_\perp} \sum_{m,\vec{q}_\perp} |C_{m,\vec{q}_\perp}|^2 \cdot |I_{n,N}^m|^2 \cdot |J_{N,N'}(a_c^2 q_\perp^2 / 2)|^2 \times \\
 &\quad \sum_{g,s=-\infty}^{+\infty} J_g \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}}{m^* \Omega^2} \right) J_s \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}}{m^* \Omega^2} \right) \cdot \exp[i(g-s)\Omega t] \int_{-\infty}^t dt' \times \\
 &\quad \times \left[n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - n_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') \cdot N_{m,\vec{q}_\perp} \right] \\
 &\quad \times \exp\{i(\varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t')\} \times + \\
 &\quad + \left[n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') \cdot N_{m,\vec{q}_\perp} - n_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp}(t') \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) \right] \times \\
 &\quad \times \exp\{i(\varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t')\} - \\
 &\quad - \left[n_{n',N',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp}(t') \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') \cdot N_{m,\vec{q}_\perp} \right] \times \\
 &\quad \times \exp\{i(\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t')\} - \\
 &\quad - \left[n_{n',N',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp}(t') \cdot N_{m,\vec{q}_\perp} - n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t') \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) \right] \times \\
 &\quad \times \exp\{i(\varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta)(t-t')\} \} \\
 &\hspace{15em} (4.49)
 \end{aligned}$$

Phương trình (4.49) là phương trình động lượng tử cho điện tử giam cầm trong hố lượng tử khi có mặt từ trường trường hợp phonon giam cầm lần đầu tiên được chúng ta thu nhận. Trên cơ sở phương trình (4.49), chúng ta sẽ thu được hàm phân bố không cân bằng của điện tử như biểu thức dưới đây:

$$\begin{aligned}
n_{n,N,\vec{k}_\perp}(t) = & - \sum_{n',N'} \sum_{\vec{k}_\perp',\vec{q}_\perp} |C_{m,\vec{q}_\perp}|^2 \cdot |I_{n,n'}^m|^2 \cdot |J_{N,N'}|^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s \left(\frac{e\vec{E}_o \vec{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \cdot J_{s+s'} \left(\frac{e\vec{E}_o \vec{q}_\perp}{m^* \Omega^2} \right) \cdot \frac{\exp(-is\Omega t)}{s\Omega} \times \\
& \times \left\{ \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} \cdot N_{m,\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta} - \right. \\
& - \frac{\bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} \cdot N_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta} + \\
& + \frac{\bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} \cdot N_{m,\vec{q}_\perp} - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1)}{\varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta} + \\
& \left. + \frac{\bar{n}_{n',N',\vec{k}_\perp-\vec{q}_\perp} \cdot (N_{m,\vec{q}_\perp} + 1) - \bar{n}_{n,N,\vec{k}_\perp} \cdot N_{m,\vec{q}_\perp}}{\varepsilon_{n',N'}^H(\vec{k}_\perp) - \varepsilon_{n,N}^H(\vec{k}_\perp - \vec{q}_\perp) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - g\hbar\Omega + i\hbar\delta} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.50}$$

4.3.3. Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử

Để tính được hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử, trước tiên chúng ta đi tìm biểu thức trường mình của mật độ dòng hạt tải theo hàm phân bố không cân bằng điện tử. Tiếp theo đó, chúng ta thu được biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử cho trường hợp không có mặt từ trường ngoài:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{16\pi^3 e^2 \Omega k_B T}{c \sqrt{\chi_\infty} E_o^2 \varepsilon_o V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \sum_{n,n'} \sum_{\vec{k}_\perp,\vec{q}_\perp} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{nn'}^m|^2 \frac{k J_k^2}{q_\perp^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2} \times \\
& \times \left(\bar{n}_{n,\vec{k}_\perp} - \bar{n}_{n',\vec{k}_\perp+\vec{q}_\perp} \right) \delta \left(\varepsilon_{n'}(\vec{k}_\perp + \vec{q}_\perp) - \varepsilon_n(\vec{k}_\perp) + \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp} - k\hbar\Omega \right) + \left[\omega_{m,\vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m,\vec{q}_\perp} \right]
\end{aligned}
\tag{4.51}$$

Trong biểu thức (4.51), $\left[\omega_{m,\vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m,\vec{q}_\perp} \right]$ có nghĩa là số hạng thứ hai thu được từ số hạng thứ nhất nếu thay $\omega_{m,\vec{q}_\perp} \rightarrow -\omega_{m,\vec{q}_\perp}$. Biểu thức (4.51), cho thấy hệ số hấp thụ sóng điện từ trong hố lượng tử phụ thuộc phi

tuyến vào các thông số của hệ giống như bán dẫn khối. Đồng thời, nó còn phụ thuộc mạnh vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam cầm điện tử, như chỉ số mini vùng n, n' là độ rộng L của hố lượng tử, sự giam cầm phonon m . Để thu được biểu thức cụ thể, chúng ta tính toán hệ số hấp thụ sóng điện từ cho hai trường hợp giới hạn: hấp thụ gần ngưỡng và hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ.

- Trường hợp hấp thụ gần ngưỡng:

Trường hợp này, phải thỏa mãn điều kiện: $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m,\vec{q}_\perp}| \ll \bar{\varepsilon}$

($\bar{\varepsilon}$ là năng lượng trung bình chuyển động nhiệt của điện tử). Xét trường hợp hấp thụ một photon, sử dụng hàm phân bố cân bằng của điện tử theo phân bố Boltzmann (xét khí điện tử không suy biến), thực hiện các phép tính tích phân, ta thu được biểu thức hệ số hấp thụ trong trường hợp gần ngưỡng:

$$\alpha = \frac{e^4 n_o^* (k_B T)^2}{\varepsilon_o c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 \hbar^4 L} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\hbar}{k_B T} (\omega_o - \Omega) \right] \right\} \sum_{n, n', m} |I_m^n|^2 \exp \left\{ -\frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m^* L^2 k_B T} \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{-\hbar^2}{4m^* k_B T} (\lambda_o + |\lambda_o|) \right\} \left\{ 1 + \frac{3}{8} \frac{e^2 E_o^2}{\hbar^2 m^* \Omega^4} \left(1 + \frac{\hbar^2}{4m^* k_B T} |\lambda_o| \right) \right\} + [\omega_o \rightarrow -\omega_o]$$

(4.52)

$$\text{với } \lambda_o = \frac{2m^*}{\hbar^2} \left[(n'^2 - n^2) \frac{\hbar^2}{2m^* L^2} + \hbar(\omega_o - \Omega) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]$$

Biểu thức trên chính là biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm dưới sự ảnh hưởng của phonon giam cầm trong hố lượng tử cho trường hợp gần ngưỡng lần đầu tiên thu nhận được bằng phương pháp phương trình đồng lượng tử. Khi chỉ số lượng tử m đặc trưng cho phonon giam cầm bị triệt tiêu thì ta lại thu được kết quả tương ứng cho trường hợp không giam cầm đã được công bố trong [63] cho trường hợp gần ngưỡng. Nếu tiếp tục cho cường độ điện trường tiến tới 0, chúng ta sẽ thu được biểu thức của hệ số hấp thụ tuyến tính sóng điện từ trong hố lượng tử dựa trên phương pháp Kubo - Mori [60].

- Trường hợp hấp thụ xa ngưỡng:

Trường hợp này, phải có điều kiện: $|k\hbar\Omega - \hbar\omega_{m,\bar{q}_\perp}| \gg \bar{\varepsilon}$ ($\bar{\varepsilon}$ là năng lượng trung bình chuyển động nhiệt của điện tử). Điều này có nghĩa là các kết quả cho vector mật độ dòng $\bar{J}_\perp(t)$ và hệ số hấp thụ phi tuyến không phụ thuộc vào hàm phân bố điện tử. Mặt khác, vì hàm δ không phụ thuộc vào các vector $\bar{k}_\perp$. Do đó, ta có thể bỏ qua các vector $\bar{k}_\perp$ và $\bar{q}_\perp$ trong công thức (4.51). Biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ (hấp thụ xa ngưỡng sóng điện từ) có dạng:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 e^4 n_o^* k_B T}{\varepsilon_o c \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 \hbar^2 m_e L} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_o} \right) \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\hbar}{k_B T} (\omega_o - \Omega) \right] \right\} \sum_{n,n',m} |I_{nn'}^m|^2 \left\{ 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{eE_o}{2m_e \Omega^2} \right)^2 \lambda_o \right\} \lambda_o^{3/2} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 - \lambda_o \right]^{-1} \quad (4.53)$$

Biểu thức (4.53) là biểu thức giải tích hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm dưới sự ảnh hưởng của phonon giam cầm trong hố lượng tử cho trường hợp xa ngưỡng. Khi chỉ số lượng tử m đặc trưng cho phonon giam cầm bị triệt tiêu thì ta lại thu được kết quả tương ứng cho trường hợp không giam cầm đã được công bố trong [63] cho trường hợp xa ngưỡng.

Khi có mặt từ trường ngoài, xét trường hợp hấp thụ một photon và giới hạn các thành phần $J_k(x)$ với $k=1, 2, \dots$. Sau một vài biến đổi, chúng ta thu được biểu thức hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm trong hố lượng tử.

$$\alpha = \frac{e^4 n_0^* k_B T \Omega_p^2 \hbar^2}{4 \epsilon_0 c \Omega^3 \pi a_c^2 \sqrt{\chi_\infty}} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \sum_{n \neq n', N, N'} \sum_m |I_{n, n'}^m|^2 \left(1 + \frac{3e^2 E_0^2}{16 a_c^2 m^{*2} \Omega^4} (N + N' + 1) \right) \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[\frac{(N + \frac{1}{2}) \hbar \Omega_B + \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2 m^{*2} L^2}}{k_B T} \right] - \exp \left[- \frac{(N' + \frac{1}{2}) \hbar \Omega_B + \frac{\pi^2 \hbar^2 n'^2}{2 m^{*2} L^2}}{k_B T} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\hbar \sqrt{A_Q} |N - N'|}{|N - N'| [(N' - N) \hbar \Omega_B + \frac{\pi^2 \hbar^2 (n^2 - n'^2)}{2 m^{*2} L^2} + \hbar \omega_0 - \hbar \Omega + \frac{\hbar^2}{2 m^*} \left(\frac{m \pi}{L} \right)^2 + A_Q \hbar^2} +$$

$$+ [\omega_0 \rightarrow -\omega_0]$$

(4.54)

trong đó $A_Q = N_0 \frac{|C_0|^2}{4 \pi \hbar^2} \sum_{n, n'} |I_{n, n'}^m|^2$;

Biểu thức (4.54), cho thấy: hệ số hấp thụ sóng điện từ gồm hai phần, một phần tuyến tính và một phần phi tuyến theo cường độ E_0 của sóng điện từ. Hệ số hấp thụ sóng điện từ trong hố lượng tử ngoài việc phụ thuộc phi tuyến vào cường độ điện trường E_0 , nhiệt độ T của hệ, tần số Ω của sóng điện từ, thì nó còn phụ thuộc phi tuyến vào các đại lượng đặc trưng cho sự giam giữ điện tử như: chỉ số mini vùng (n, n'); mức phân vùng Landau N, N' ; độ rộng của hố lượng tử L ; và chỉ số m đặc trưng cho sự giam giữ phonon. Trong trường hợp giới hạn, khi chỉ số lượng tử m tiến tới 0, ta sẽ thu được kết quả khi không tính tới sự giam cầm phonon [63].

4.3.4. Khảo sát số và thảo luận kết quả

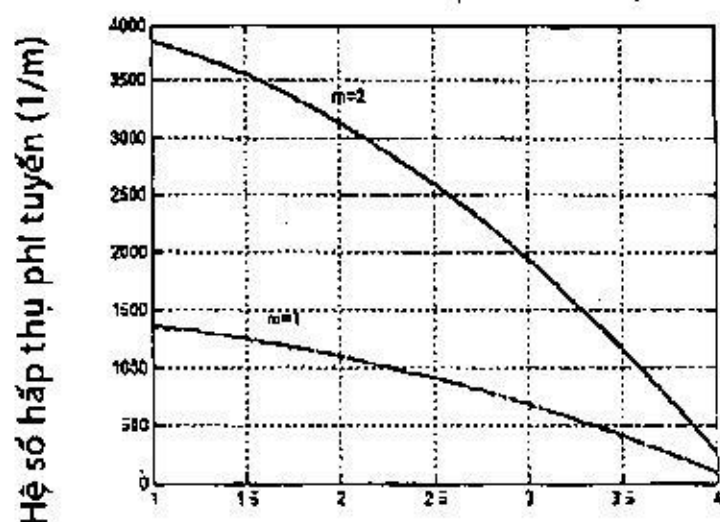
Trong mục này, chúng ta khảo sát số để làm rõ các kết quả tính toán lý thuyết và thảo luận kết quả thu được của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử điển hình AlAs/GaAs/AlAs, các tham số được sử dụng để khảo sát như bảng sau:

Bảng 4.2: Các tham số sử dụng tính toán số đối với hố lượng tử

Dại lượng	Ký hiệu	Giá trị
Hệ số điện môi tĩnh	χ_0	12.9
Hệ số điện môi cao tần	χ_∞	10.9
Điện tích hiệu dụng của điện tử (C)	e	$2,07e_0$
Khối lượng hiệu dụng của điện tử (kg)	m^*	$0.067m_0$
Năng lượng của phonon quang (meV)	$\hbar\omega_0$	36.25
Nồng độ hạt tải điện (m^{-3})	n_0	10^{23}
Độ rộng của hố lượng tử (m)	L	9.10^{-8}

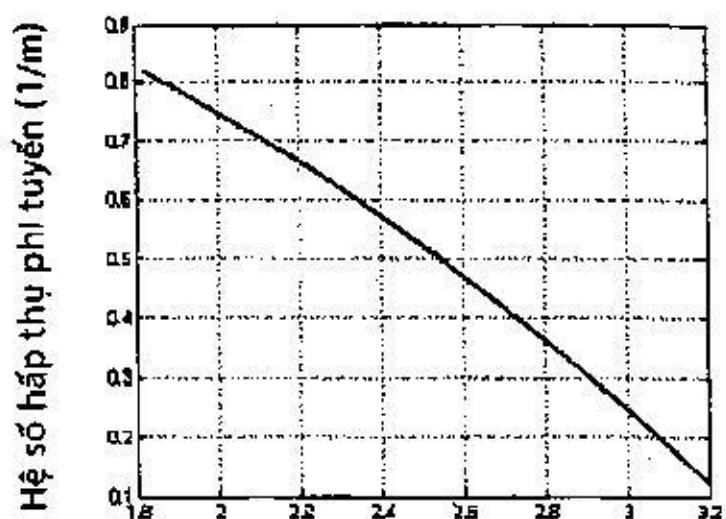
Tính toán số và vẽ đồ thị cho hệ số hấp thụ phi tuyến trường hợp vắng mặt từ trường ngoài cho thấy:

Đồ thị trên hình 2.31 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong hố lượng tử vào biên độ điện trường E_0 và chỉ số lượng tử m của hệ (hấp thụ gần ngưỡng) trong trường hợp có kể đến sự giam cầm phonon. Từ các đồ thị ta thấy, khi cường độ điện trường E_0 tăng thì hệ số hấp thụ trong trường hợp tính tới sự giam cầm phonon giảm chậm hơn so với trường hợp phonon không giam cầm, nhưng giá trị của hệ số hấp thụ lớn hơn cỡ 10^3 lần. Kết quả này rất khác biệt so với bán dẫn khối, đối với bán dẫn khối thì ngược lại, hệ số hấp thụ trong hai trường hợp này tăng lên khi tăng cường độ điện trường E_0 [19, 32, 46].



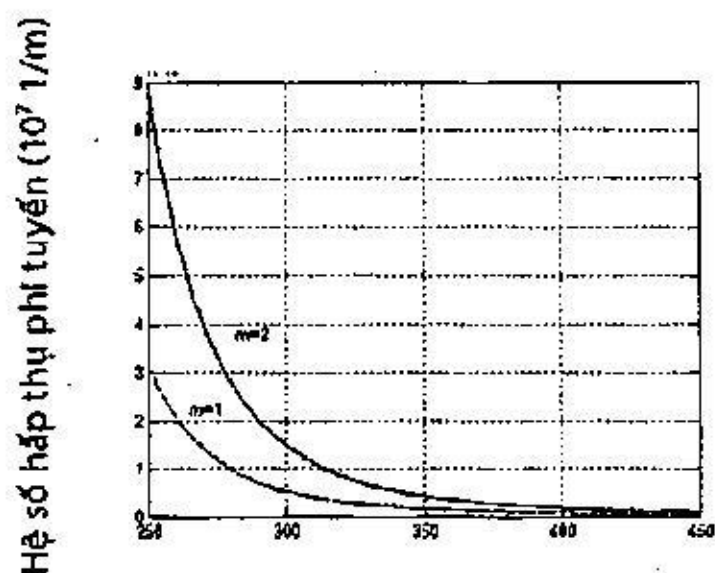
Cường độ sóng điện từ ngoài (10^5 V/cm)

Hình 4.31. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 và m (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)



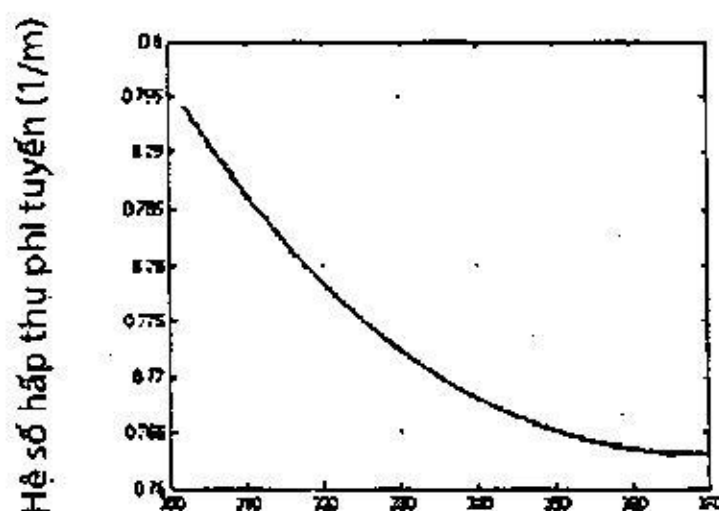
Cường độ sóng điện từ ngoài (10^5 V/cm)

Hình 4.32. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)



Nhiệt độ T (K)

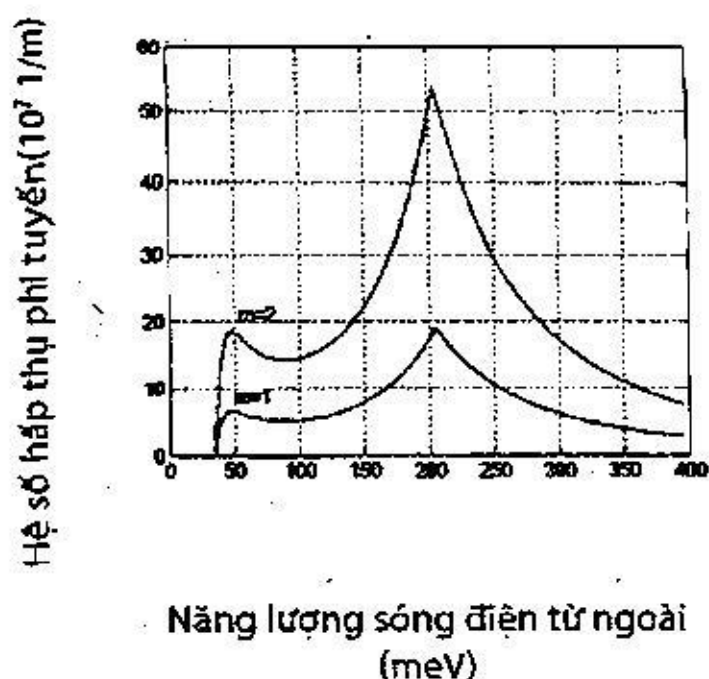
Hình 4.33. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo T (phonon giam cầm hấp, thụ gần ngưỡng)



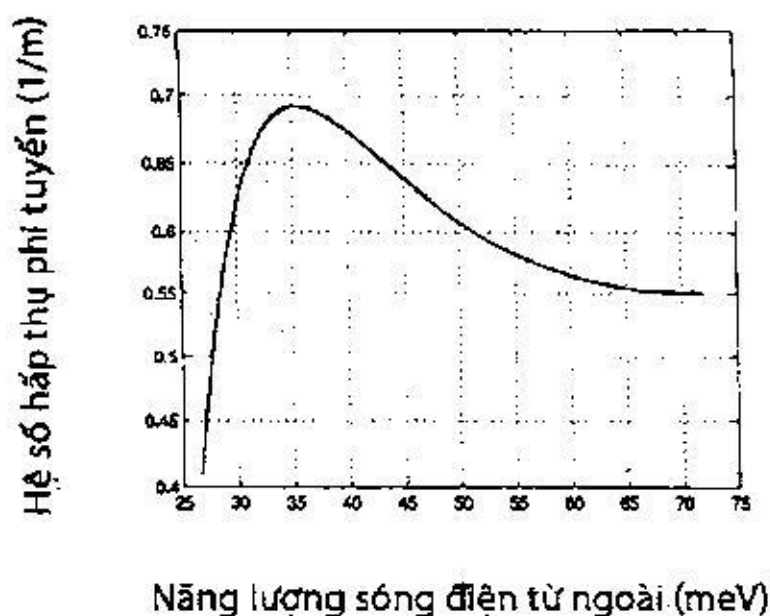
Nhiệt độ T (K)

Hình 4.34. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo T (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

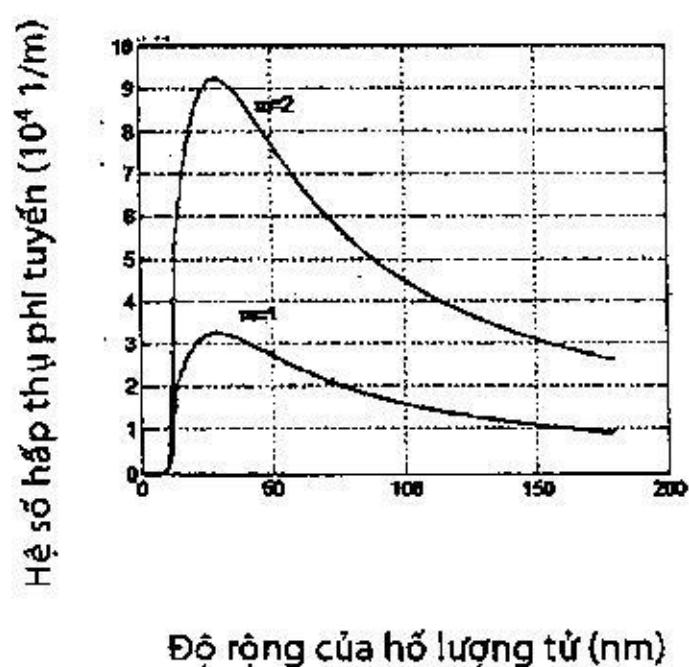
Đồ thị trên hình 4.33, biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào nhiệt độ T và chỉ số lượng tử m . Kết quả cũng cho ta thấy phonon giam cầm đã gia tăng đáng kể độ lớn của hệ số hấp thụ. Trong trường hợp phonon giam cầm, hệ số hấp thụ phi tuyến giảm nhanh theo nhiệt độ hơn so với trường hợp phonon không giam cầm.



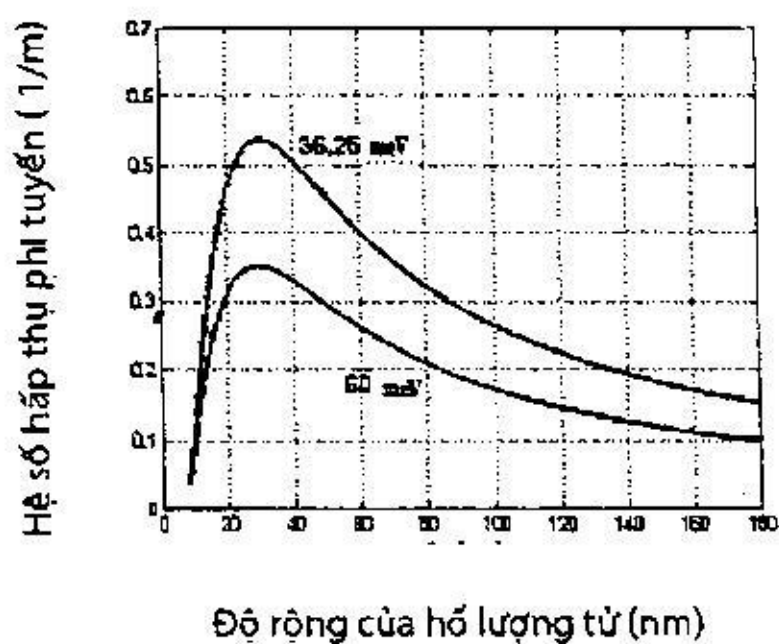
Hình 4.35. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)



Hình 4.36. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)



Hình 4.37. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo L (phonon giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng) với $m=1$ $m=2$.

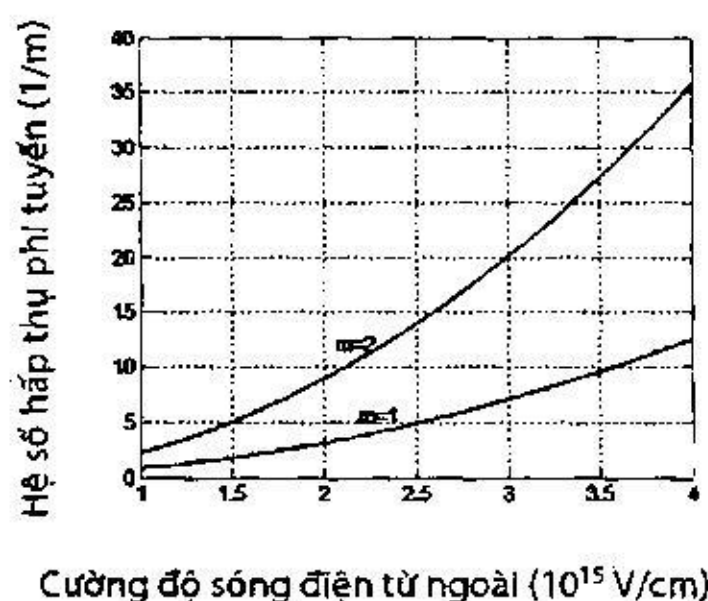


Hình 4.38. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo L (phonon không giam cầm, hấp thụ gần ngưỡng)

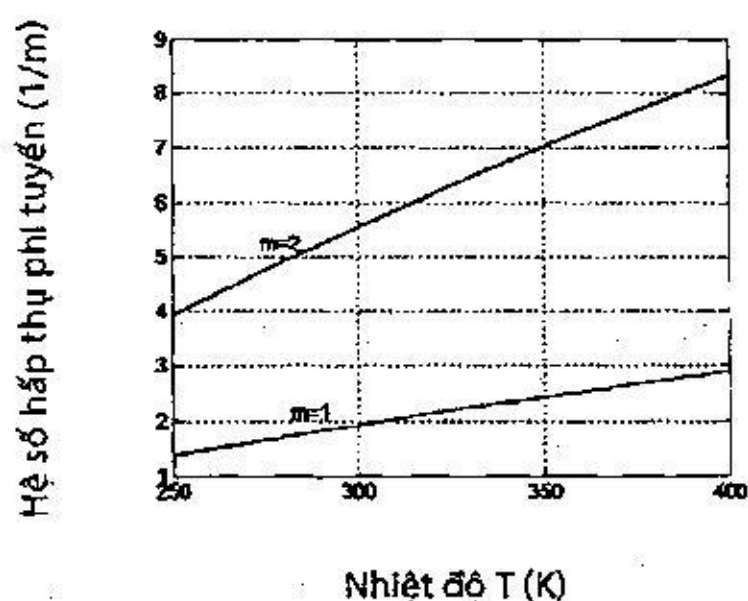
Đồ thị trên hình 4.35, mô tả sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh vào năng lượng của trường điện từ ngoài cho trường hợp hấp thụ gần ngưỡng. Đồ thị cho thấy, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong hố lượng tử phụ thuộc rất mạnh vào năng lượng của điện trường ngoài, đã xuất hiện hai đỉnh cộng hưởng rõ nét. Trong đó 1 đỉnh

cộng hưởng xuất hiện khi tần số của trường điện từ bằng tần số của phonon quang ($\Omega = \omega_0$) giống như trường hợp phonon không giam cầm [63]; đỉnh còn lại xuất hiện với giá trị lớn hơn rất nhiều tại vùng có năng lượng lớn hơn năng lượng của phonon quang trong khi đó nó dường như không thay đổi trong trường hợp phonon không giam cầm. Kết quả này cho thấy khá rõ nét ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ sóng điện từ, khi chỉ số m tăng, giá trị của hệ số hấp thụ cũng tăng lên đáng kể và lớn hơn nhiều so với trường hợp phonon không giam cầm [63] cỡ vài chục lần.

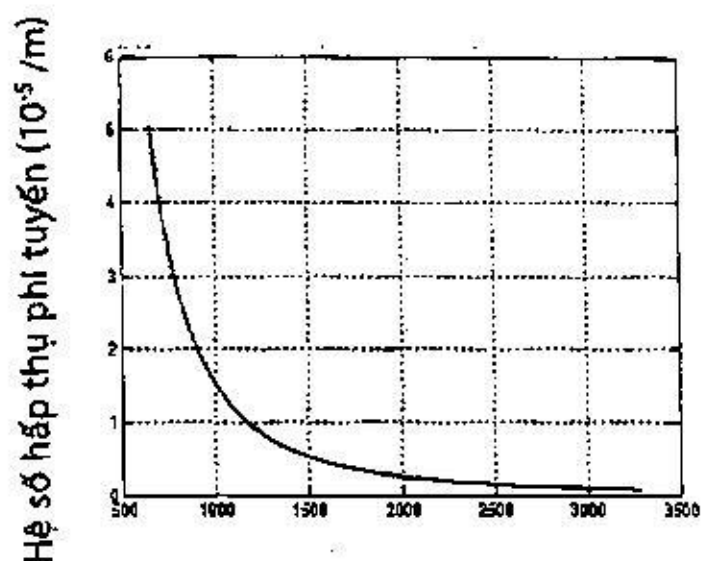
Đồ thị trên các hình 4.37 - 4.38 cho thấy hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ cũng đều phụ thuộc rất lớn vào độ rộng của hố lượng tử, có đỉnh cộng hưởng xuất hiện trong cả hai trường hợp kể đến giam cầm phonon và không kể đến giam cầm phonon. Kết quả cũng cho thấy dưới tác động của sự giam giữ phonon, hệ số hấp thụ tăng lên rất nhiều. Đồ thị trên các hình 4.39 - 4.42, thể hiện sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ sóng điện từ vào cường độ điện trường ngoài, nhiệt độ, năng lượng của điện trường ngoài trong trường hợp hấp thụ xa ngưỡng. Kết quả thu được tương tự trường hợp hấp thụ gần ngưỡng nhưng giá trị nhỏ hơn.



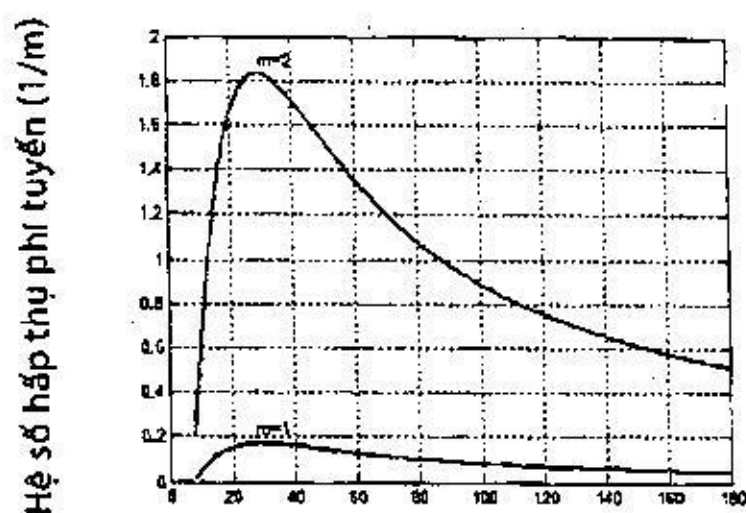
Hình 4.39. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo E_0 và m (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



Hình 4.40. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo T và m (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



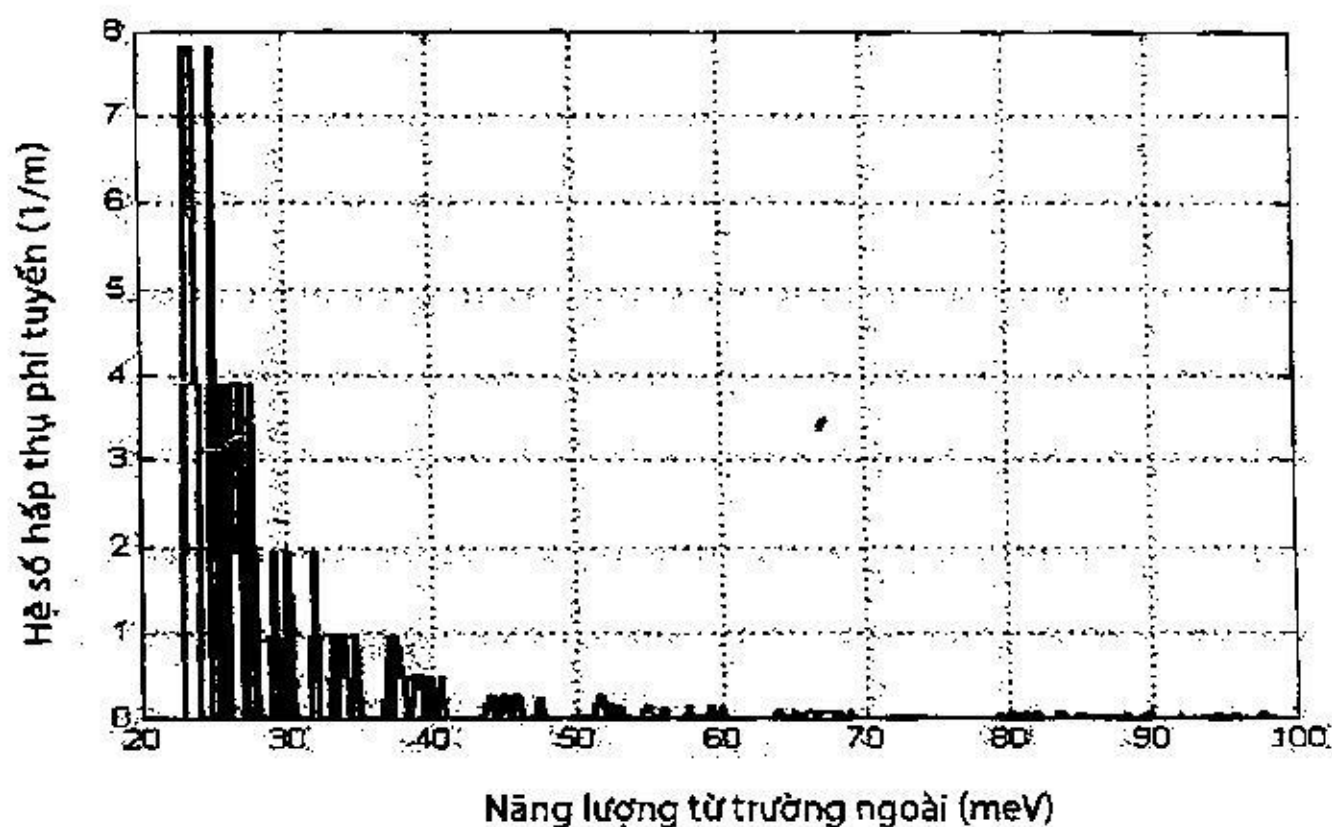
Năng lượng sóng điện từ ngoài (meV)



Độ rộng hố lượng tử (nm)

Hình 2.41. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)

Hình 2.42. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo L và m (phonon giam cầm, hấp thụ xa ngưỡng)



Hình 4.43. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$ (phonon giam cầm, có từ trường)

Kết quả tính toán số và vẽ đồ thị cho hệ số hấp thụ phi tuyến trường hợp có mặt từ trường ngoài cho thấy:

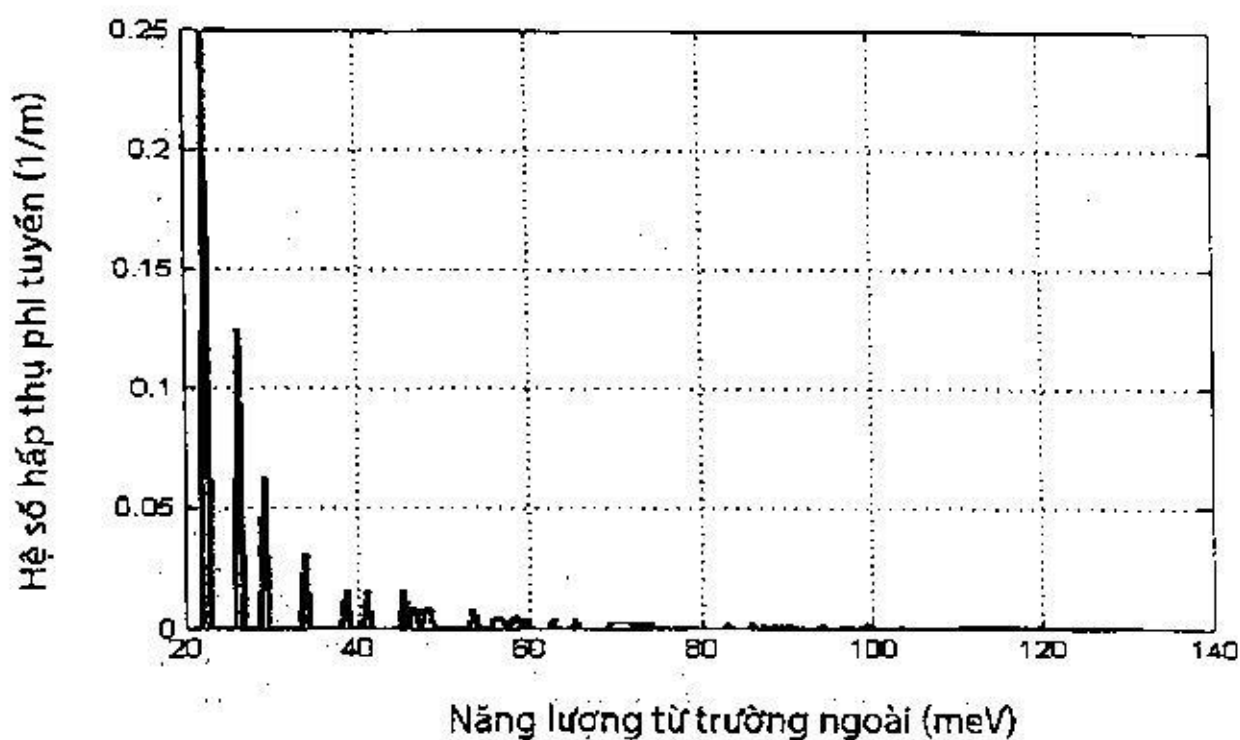
Đồ thị trên các hình 4.43 - 4.44, biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong hố lượng tử vào năng lượng của

điện trường ngoài trong cả hai trường hợp: kể đến sự giam cầm phonon và không kể đến sự giam cầm phonon. Cả hai hình vẽ đều chỉ ra rằng sự phụ thuộc này là phi tuyến và rất lớn, đã xuất hiện nhiều đỉnh cộng hưởng dưới dạng vạch phổ. Đây chính là điểm khác biệt so với trường hợp vắng mặt từ trường ngoài, chỉ có hai đỉnh cộng hưởng. Một điểm khác biệt quan trọng giữa hai trường hợp kể đến sự giam cầm phonon và không kể tới sự giam cầm phonon đó là mật độ các đỉnh cộng hưởng, giá trị của hệ số hấp thụ lớn hơn nhiều trong trường hợp có kể đến sự giam cầm phonon. Đồng thời kết quả này cũng chỉ ra sự khác biệt so với bán dẫn khối. Sự khác biệt này là do khi có mặt từ trường, phổ năng lượng của điện tử là hoàn toàn bị gián đoạn, vì vậy mức Landau mà điện tử có thể nhảy tới sau quá trình hấp thụ bị ràng buộc bởi điều kiện:

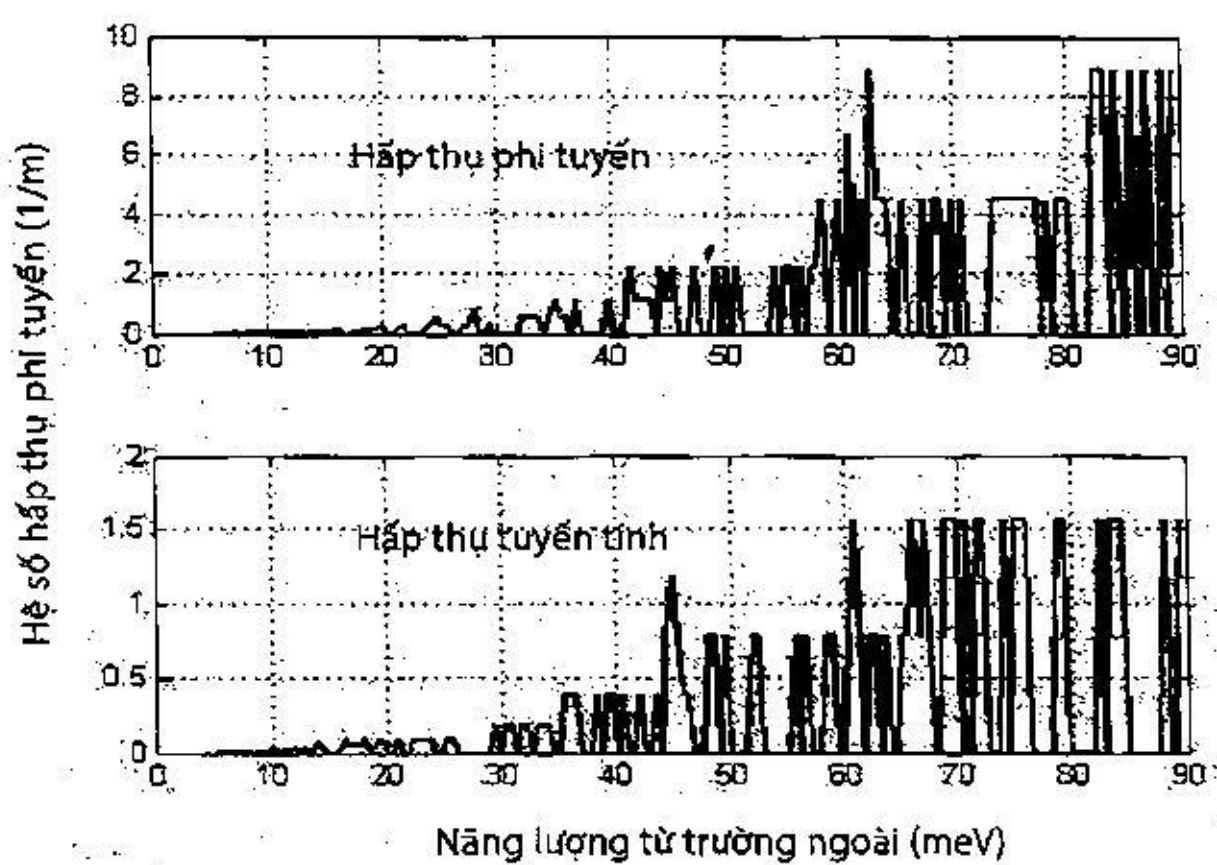
$$(n'^2 - n^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m^* L^2} + M\hbar\Omega_B - \hbar\omega_o + \hbar\Omega + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 = 0$$

dẫn tới phổ hấp thụ bao gồm các đỉnh cực hẹp, cách đều nhau. Kết quả này hoàn toàn trái với bán dẫn khối (chỉ số mức phân vùng Landau mà các điện tử nhảy tới sau quá trình hấp thụ là hoàn toàn tùy ý). Do đó, đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào năng lượng của sóng điện từ trong hố lượng tử khi có từ trường là phổ vạch.

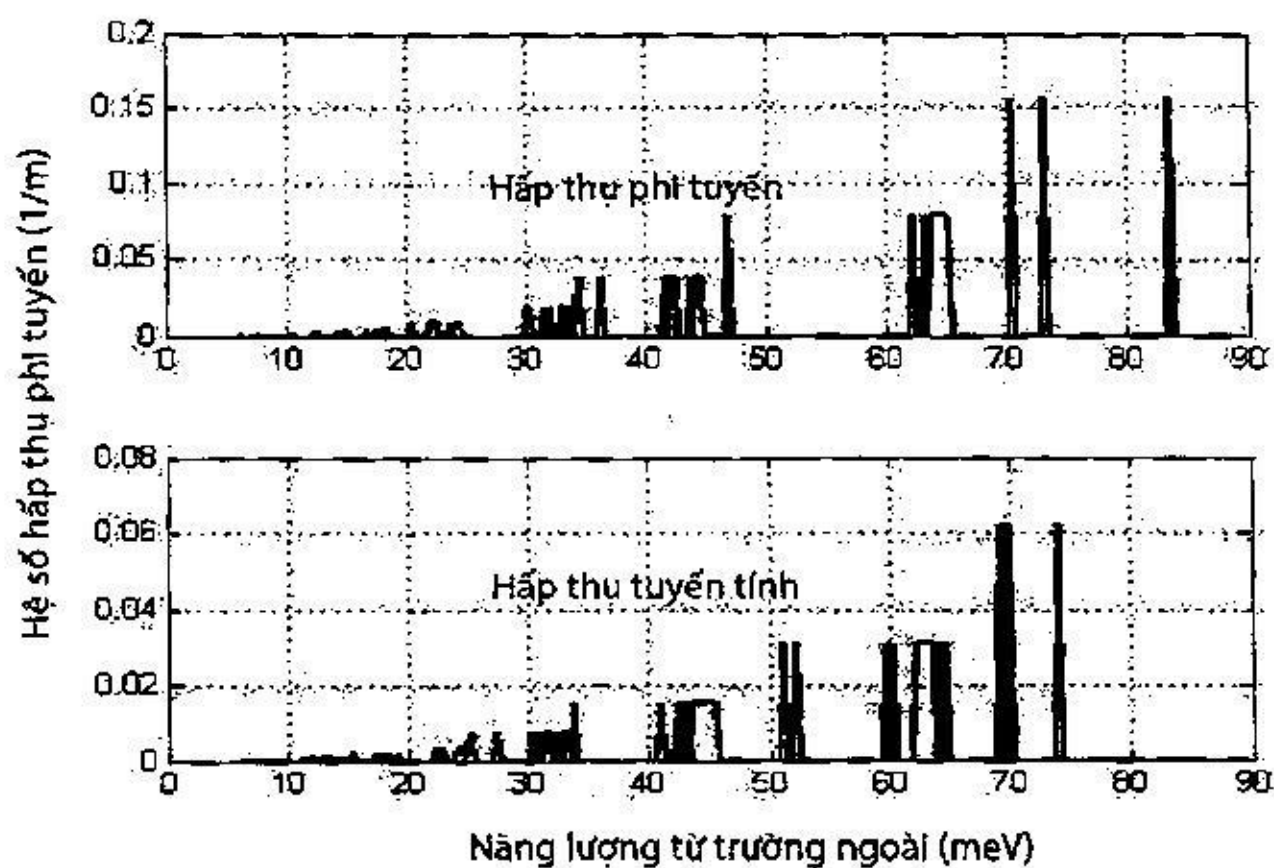
Đồ thị trên các hình 4.45-4.46, biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào năng lượng của từ trường ngoài trong cả hai trường hợp, kết quả cho thấy trong cả hai trường hợp phi tuyến và tuyến tính, sự phụ thuộc này cũng là gián đoạn và rất mạnh. Ảnh hưởng của sự giam giữ phonon làm cho độ lớn của hệ số hấp thụ và mật độ của các đỉnh cộng hưởng tăng lên rất nhiều so với trường hợp phonon không giam cầm [63].



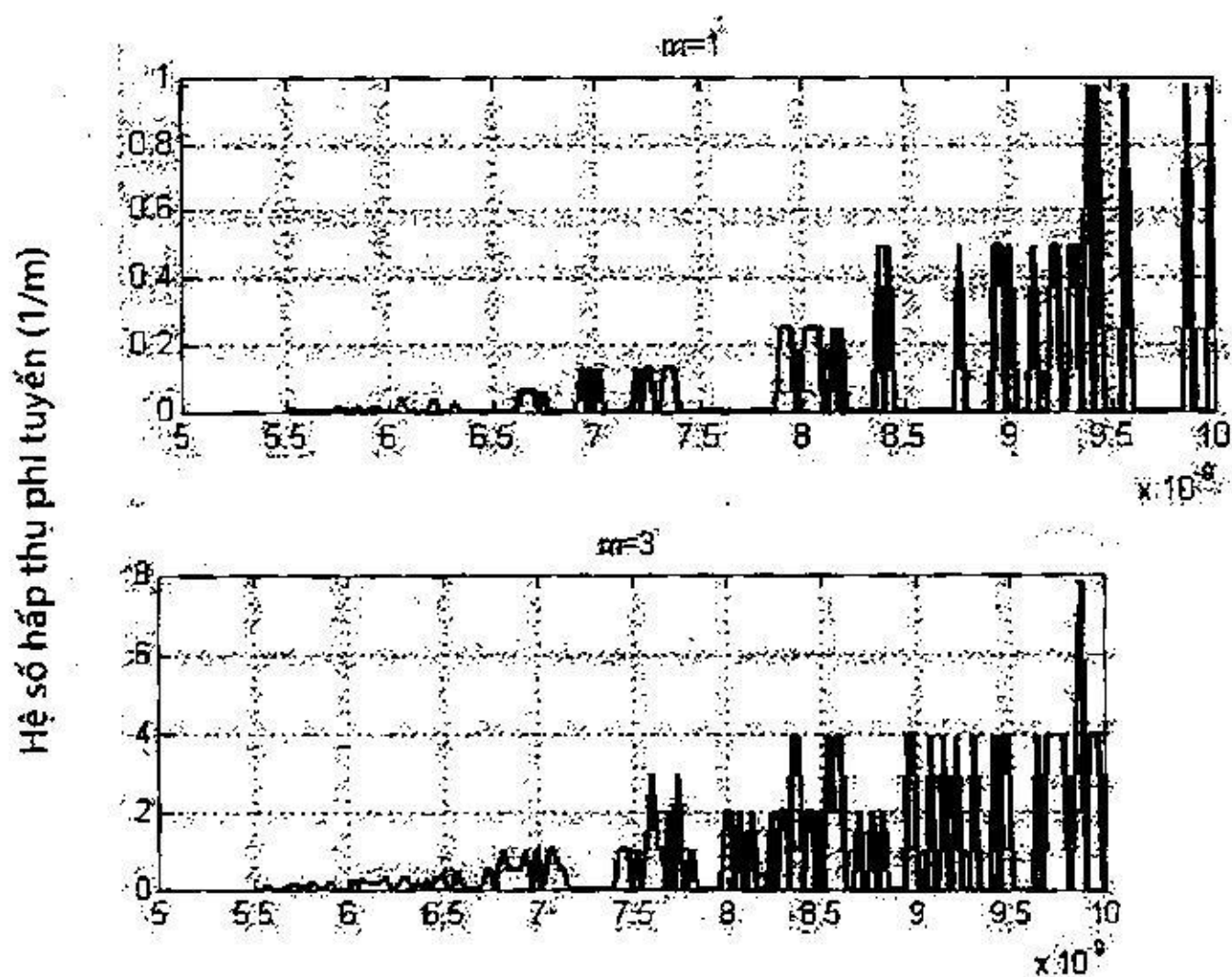
Hình 4.44. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega$
(phonon không giam cầm, có từ trường)



Hình 4.45. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega_B$
(phonon giam cầm, có từ trường)



Hình 4.46. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo $\hbar\Omega_B$ (phonon không giam cầm, có từ trường)



Hình 4.47. Khảo sát hệ số hấp thụ α theo L và m (phonon giam cầm, có từ trường)

Đồ thị trên hình 4.47, biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào độ rộng hố lượng tử và chỉ số giam cầm phonon m . Kết quả chỉ ra rằng khi chỉ số đặc trưng cho sự giam cầm phonon thay đổi dẫn đến sự thay đổi vị trí và độ lớn của các vạch phổ. Giá trị lớn nhất của hệ số hấp thụ xấp xỉ bằng 1 khi $m=1$, tăng lên xấp xỉ bằng 8 khi chỉ số giam cầm tăng đến giá trị $m=3$.

Trong các hình biểu diễn trên đều chỉ ra rằng khi có mặt từ trường, hệ số hấp thụ nhỏ hơn so với trường hợp không có từ trường, đây là điểm khác biệt so với trường hợp phonon không giam cầm.

Kết luận:

Sử dụng phương pháp phương trình động lượng tử cho điện tử trong hệ hai chiều đã thu nhận được biểu thức tổng quát của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong bán dẫn thấp chiều (siêu mạng pha tạp, siêu mạng hợp phần và hố lượng tử) khi kể đến phonon giam cầm trong cả hai trường hợp vắng mặt và có mặt từ trường. Sau khi tính toán cho hai trường hợp tới hạn cụ thể, hấp thụ gần ngưỡng và xa ngưỡng, đã thu nhận được biểu thức giải tích tường minh cho hệ số hấp thụ trong ba loại bán dẫn hai chiều là siêu mạng pha tạp, siêu mạng hợp phần và hố lượng tử.

Về mặt định tính, thông qua các biểu thức giải tích tường minh này, cho ta thấy, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong bán dẫn thấp chiều không chỉ phụ thuộc vào tham số nhiệt độ, cường độ điện trường và năng lượng của trường laser, năng lượng của từ trường ngoài như trong bán dẫn khối, mà còn phụ thuộc phi tuyến vào các tham số đặc trưng cho từng cấu trúc bán dẫn thấp chiều như: chu kì, số chu kì, nồng độ pha tạp, độ rộng mini vùng của siêu mạng, vào độ rộng của hố lượng tử. Đặc biệt hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ còn phụ thuộc vào chỉ số giam cầm phonon. Khi cho chỉ số lượng tử m tiến tới 0, chúng ta đã thu được kết quả của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trường hợp không kể đến phonon giam cầm. Điều này chứng minh tính đúng đắn trong sự tính toán giải tích.

Về mặt định lượng, thông qua khảo sát số các biểu thức giải tích trên cho ba cấu trúc bán dẫn thấp chiều cụ thể: siêu mạng pha tạp n-GaAs/p-GaAs, siêu mạng hợp phần GaAs-Al_{0.3}Ga_{0.7}As và hố lượng tử AlAs/GaAs/AlAs, ảnh hưởng của phonon giam cầm lên hấp thụ phi tuyến sóng điện từ mạnh bởi điện từ giam cầm đã được thể hiện rõ nét.

Một điểm chung khác biệt, đó là phonon giam cầm làm gia tăng đáng kể hấp thụ sóng điện từ trong hệ thấp chiều, so với trường hợp phonon không giam cầm, độ lớn của hệ số hấp thụ tăng cỡ chục lần trong siêu mạng pha tạp, cỡ 50 lần trong siêu mạng hợp phần và cỡ 10³ lần trong hố lượng tử (khảo sát hệ số theo E₀, hấp thụ gần ngưỡng, vắng từ trường ngoài).

Điểm khác biệt nữa, đó là so với trường hợp phonon không giam cầm, sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào các tham số có sự thay đổi đáng kể, điển hình là đối với siêu mạng hợp phần và hố lượng tử, khi khảo sát theo năng lượng sóng ngoài đã xuất hiện thêm một đỉnh cộng hưởng. Kết quả này là rất mới lạ so với bán dẫn khối và bán dẫn thấp chiều trường hợp phonon khối. Trong cả ba cấu trúc bán dẫn hai chiều trên, hệ số hấp thụ gia tăng đáng kể khi chỉ số lượng tử m tăng.

Khi có mặt từ trường, trong trường hợp phonon giam cầm, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ phụ thuộc vào các tham số dưới dạng vạch phổ riêng biệt. Điều này là rất phù hợp với lý thuyết lượng tử, khi có mặt từ trường thì năng lượng của điện tử bị lượng tử hóa hoàn toàn, dẫn đến phổ hấp thụ không còn liên tục như khi vắng mặt từ trường. Đây là một điểm khác biệt so với bán dẫn khối thông thường. So với trường hợp phonon không giam cầm, độ lớn của hệ số hấp thụ gia tăng đáng kể, cỡ 30 chục lần trong hố lượng tử. Mật độ vạch phổ hấp thụ có sự thay đổi rõ nét, vị trí các vạch phổ dịch chuyển khi chỉ số lượng tử m thay đổi tùy thuộc vào đặc điểm riêng của từng cấu trúc bán dẫn.

Ngoài ra, kết quả cũng chỉ ra rằng, ảnh hưởng của phonon giam cầm lên sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong các cấu trúc bán dẫn khác nhau là khác nhau. Sự khác biệt này không chỉ về sự gia tăng giá trị

của hệ số hấp thụ mà còn khác biệt rõ rệt trong sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các tham số khác.

Nhìn chung kết quả trên cho thấy, phonon giam cầm ảnh hưởng rất mạnh lên hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong các bán dẫn thấp chiều. Kết quả này khá phù hợp với các nghiên cứu quốc tế đã được công bố về ảnh hưởng của phonon giam cầm lên một số hiệu ứng khác trong bán dẫn thấp chiều như sự tăng đáng kể tán xạ Raman, cộng hưởng tương tác điện tử phonon, hiệu ứng Polaron khi xét đến sự giam cầm phonon.

4.4. ẢNH HƯỞNG CỦA PHONON GIAM CẦM LÊN SỰ HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ MẠNH BỞI ĐIỆN TỬ GIAM CẦM TRONG DÂY LƯỢNG TỬ

Hiệu ứng giam kích thước đã làm thay đổi kịch tính các tính chất vật lý của vật liệu bán dẫn thấp chiều. Đối tượng tác động trực tiếp của hiệu ứng giam kích thước là các điện tử trong bán dẫn, chuyển động của nó bị giới hạn theo các chiều giam kích thước. Chính sự giới hạn chuyển động này mà tính chất vật lý của hệ thấp chiều có tính ưu việt hơn hẳn so với bán dẫn khối. Bên cạnh sự giam cầm điện tử, trong các hệ thấp chiều, các phonon cũng có thể bị giam giữ do hiệu ứng giam kích thước. Đã có rất nhiều các công trình nghiên cứu các tính chất vật lý của bán dẫn có tính đến yếu tố giam cầm phonon [9, 34, 41, 45, 50, 54]. Sự giam cầm phonon trong các hệ thấp chiều đã làm thay đổi đáng kể các hiệu ứng vật lý so với trường hợp phonon khối, ví dụ, sự tán xạ điện tử-phonon trong siêu mạng pha tạp [65], trong dây lượng tử [32], ... Hấp thụ phi tuyến sóng điện từ có tính đến yếu tố giam cầm cũng đã được nghiên cứu trong hệ hai chiều. Để có được những nhận định hoàn thiện hơn về sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử, trong phần này dành giới thiệu các nghiên cứu lý thuyết hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử có tính đến yếu tố giam cầm phonon [11]. Mô hình dây lượng tử được chọn là dây lượng tử hình chữ nhật có tiết diện $L_x \times L_y$ nằm trong mặt phẳng (x, y) , chiều dài L_z .

4.4.1. Hamiltonian của hệ điện tử - phonon giam cầm trong dây lượng tử

Mô hình giam giữ phonon tương tự như với điện tử, trạng thái của phonon cũng được mô tả bởi hai số lượng tử m, k ứng với sự giam cầm theo hai phương Ox, Oy của phonon, vectơ sóng của phonon được biểu diễn theo các phương $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$, trong đó $q_x = \frac{m\pi}{L_x}, q_y = \frac{k\pi}{L_y}$.

Đặt dây lượng tử trong trường Laser $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\Omega t)$ hướng theo trục Oz có thể vectơ tương ứng $\vec{A}(t) = \frac{c}{\Omega} \vec{E}_0 \cos(\Omega t)$, Hamiltonian của hệ điện tử-phonon quang giam cầm biểu diễn thông qua toán tử số hạt:

$$H(t) = \sum_{n,l,\vec{p}} \epsilon_{n,l} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t)) a_{n,l,\vec{p}}^+ a_{n,l,\vec{p}} + \sum_{m,k,\vec{q}} \omega_o b_{m,k,\vec{q}}^+ b_{m,k,\vec{q}} + \sum_{m,k,\vec{q}} \sum_{n,l,n',l',\vec{p}} C_{\vec{q}}^{m,k} I_{n,l,n',l'}^{m,k} a_{n',l',\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{n,l,\vec{p}} (b_{m,k,-\vec{q}}^+ + b_{m,k,\vec{q}}). \quad (4.55)$$

trong đó: $b_{m,k,\vec{q}}^+, b_{m,k,\vec{q}}$ là toán tử sinh hủy phonon ở trạng thái $|m,k,\vec{q}\rangle$; ω_o là tần số phonon quang;

Hằng số tương tác điện tử-phonon quang:

$$|C_{\vec{q}}^{m,k}|^2 = \frac{\pi e^2 \omega_o}{2V \epsilon_0} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0} \right) \frac{1}{\vec{q}_z^2 + \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{L_y} \right)^2} \quad (4.56)$$

ở đây V là thể tích chuẩn hóa, ϵ_0 là hằng số điện môi, χ_∞, χ_0 là hệ số điện thẩm cao tần và hệ số điện thẩm tĩnh.

Thừa số dạng đặc trưng được xác định như sau [32]:

$$I_{n,l}^{m,k}(q_z) = (2\pi)^2 \sum_{m,k=1,3,5,\dots} 16P_{m,k}^2 / \vec{q}, \quad (4.57)$$

trong đó

$$P_{m,k} = \int_0^{L_x} dx \frac{2}{L_x} \int_0^{L_y} dy \frac{2}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n'\pi x}{L_x}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\ell\pi y}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\ell'\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{k\pi y}{L_y}\right), \quad (4.58)$$

với $\vec{A}(t)$ là thế vectơ của trường điện từ được xác định:

$$-\frac{d\vec{A}(t)}{cdt} = \vec{E}_0 \sin(\Omega t). \quad (4.59)$$

4.4.2. Phương trình động lượng tử của điện tử trong dây lượng tử khi phonon giam cầm

Phương trình động lượng tử cho điện tử trong dây lượng tử khi phonon giam cầm được xây dựng dựa trên phương trình động lượng tử tổng quát cho toán tử số hạt:

$$i \frac{\partial n_{n,\ell,\vec{p}}}{\partial t}(t) = i \frac{\partial}{\partial t} \langle a_{n,\ell,\vec{p}}^+ a_{n,\ell,\vec{p}} \rangle_t = \langle [a_{n,\ell,\vec{p}}^+ a_{n,\ell,\vec{p}}, H] \rangle_t, \quad (4.60)$$

Sử dụng Hamiltonian (4.55) và các phép biến đổi toán tử, đặt

$$F_{n_1,\ell_1,\vec{p}_1,n_2,\ell_2,\vec{p}_2,m,k,\vec{q}}(t) = \langle a_{n_1,\ell_1,\vec{p}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\vec{p}_2} b_{m,k,\vec{q}} \rangle_t$$

ta thu được:

$$i \frac{\partial n_{n,\ell,\vec{p}}}{\partial t} = \sum_{m,k,\vec{q}} \sum_{n_1,\ell_1} C_{\vec{q}}^{m,k} I_{n,\ell,n_1,\ell_1}^{m,k}(\vec{q}) (F_{n,\ell,\vec{p},n_1,\ell_1,\vec{p}-\vec{q},m,k,\vec{q}}(t) \\ + F_{n_1,\ell_1,\vec{p}-\vec{q},n,\ell,\vec{p},m,k,-\vec{q}}(t) - F_{n_1,\ell_1,\vec{p}+\vec{q},n,\ell,\vec{p},m,k,\vec{q}}(t) - F_{n,\ell,\vec{p},n_1,\ell_1,\vec{p}+\vec{q},m,k,-\vec{q}}(t)). \quad (4.61)$$

Để thu được biểu thức cho phương trình động lượng tử ta thiết lập biểu thức phương trình động lượng tử cho toán tử $F_{n_1,\ell_1,\vec{p}_1,n_2,\ell_2,\vec{p}_2,m,k,\vec{q}}(t)$:

$$i \frac{\partial}{\partial t} F_{n_1,\ell_1,\vec{p}_1,n_2,\ell_2,\vec{p}_2,m,k,\vec{q}}(t) = \langle [a_{n_1,\ell_1,\vec{p}_1}^+ a_{n_2,\ell_2,\vec{p}_2} b_{m,k,\vec{q}}, H] \rangle_t. \quad (4.62)$$

Thực hiện các tính toán cần thiết ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(t) = & i[\varepsilon_{n_1, \ell_1}(\bar{p}_1 - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) - \varepsilon_{n_2, \ell_2}(\bar{p}_2 - \frac{e}{c} \bar{A}(t)) - \omega_0] F(t) + \\ & + i \sum_{m_1, k_1, \bar{q}_1} \sum_{n_3, \ell_3} C_{\bar{q}_1}^{m_1, k_1} [\langle I_{n_3, \ell_3, n_1, \ell_1}^{m_1, k_1} a_{n_3, \ell_3, \bar{p}_1 + \bar{q}_1}^+ a_{n_2, \ell_2, \bar{p}_2} (b_{m_1, k_1, \bar{q}_1} + b_{m_1, k_1, -\bar{q}_1}^+) b_{m, k, \bar{q}} \rangle, \\ & - \langle I_{n_3, \ell_3, n_2, \ell_2}^{m_1, k_1} a_{n_1, \ell_1, \bar{p}_1}^+ a_{n_3, \ell_3, \bar{p}_2 - \bar{q}_1} b_{m, k, \bar{q}} (b_{m_1, k_1, \bar{q}_1} + b_{m_1, k_1, -\bar{q}_1}^+) \rangle,] \end{aligned} \quad (4.63)$$

trong đó $F(t) = F_{n_1, \ell_1, \bar{p}_1, n_2, \ell_2, \bar{p}_2, m, k, \bar{q}}(t)$. Phương trình (4.63) là phương trình vi phân không thuần nhất, giải phương trình này bằng phương pháp biến phân và dùng điều kiện biên theo giả thiết đoạn nhiệt: $F(t)|_{t=-\infty} = 0$ ta tìm được nghiệm:

$$\begin{aligned} F(t) = & i \int_{-\infty}^t dt_2 \sum_{m_1, k_1, \bar{q}_1} \sum_{n_3, \ell_3} C_{\bar{q}_1}^{m_1, k_1} \times \\ & \times [\langle I_{n_3, \ell_3, n_1, \ell_1}^{m_1, k_1} a_{n_3, \ell_3, \bar{p}_1 + \bar{q}_1}^+ a_{n_2, \ell_2, \bar{p}_2} (b_{m_1, k_1, \bar{q}_1} + b_{m_1, k_1, -\bar{q}_1}^+) b_{m, k, \bar{q}} \rangle_{t_2} \\ & - \langle I_{n_3, \ell_3, n_2, \ell_2}^{m_1, k_1} a_{n_1, \ell_1, \bar{p}_1}^+ a_{n_3, \ell_3, \bar{p}_2 - \bar{q}_1} b_{m, k, \bar{q}} (b_{m_1, k_1, \bar{q}_1} + b_{m_1, k_1, -\bar{q}_1}^+) \rangle_{t_2}] \times \\ & \times \exp\{i[\varepsilon_{n_1, \ell_1}(\bar{p}_1) - \varepsilon_{n_2, \ell_2}(\bar{p}_2) - \omega_0](t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Thay (4.64) vào (4.61) với các số hạng tương ứng. Sử dụng công thức (4.59) và $\exp(\pm iz \sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \exp(\pm inx)$ ($J_n(z)$ là hàm Bessel đối số thực) kết hợp với biến đổi dựa trên tính đối xứng của các đại lượng trung bình thống kê ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{n, \ell, \bar{p}}(t)}{\partial t} = & - \sum_{m, k, \bar{q}} \sum_{n_1, \ell_1} |C_{\bar{q}}^{m, k}|^2 |I_{n_1, \ell_1, n, \ell}^{m, k}(\bar{q})|^2 \sum_{r, s=-\infty}^{\infty} J_r(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m^* \Omega^2}) J_{r+s}(\frac{e\bar{E}_0 \bar{q}}{m^* \Omega^2}) \times \\ & \times \exp(is\Omega t) \int_{-\infty}^t dt_2 \{ [n_{n, \ell, \bar{p}}(t_2) N_{m, k, \bar{q}} - n_{n_1, \ell_1, \bar{p} + \bar{q}}(t_2) (N_{m, k, \bar{q}} + 1)] \times \\ & \times \exp\{i[\varepsilon_{n_1, \ell_1}(\bar{p} + \bar{q}) - \varepsilon_{n, \ell}(\bar{p}) - \omega_0 - r\Omega + i\delta](t - t_2)\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)(N_{m,k,\bar{q}}+1)-n_{n_1,\ell_1,\bar{p}+\bar{q}}(t_2)N_{m,k,\bar{q}}]\times \\
& \times \exp\{i[\varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p}+\bar{q})-\varepsilon_{n,\ell}(\bar{p})+\omega_o-r\Omega+i\delta](t-t_2)\}+ \\
& -[n_{n_1,\ell_1,\bar{p}-\bar{q}}(t_2)N_{m,k,\bar{q}}-n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)(N_{m,k,\bar{q}}+1)]\times \\
& \times \exp\{-i[\varepsilon_{n,\ell}(\bar{p}-\varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p})-\bar{q})-\omega_o-r\Omega+i\delta](t-t_2)\}- \\
& -[n_{n_1,\ell_1,\bar{p}-\bar{q}}(t_2)(N_{m,k,\bar{q}}+1)-n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)N_{m,k,\bar{q}}]\times \\
& \times \exp\{-i[\varepsilon_{n,\ell}(\bar{p})-\varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p}-\bar{q})+\omega_o-r\Omega+i\delta](t-t_2)\}\}. \quad (4.65)
\end{aligned}$$

trong đó δ là tham số vô cùng bé được đưa vào để đảm bảo giả thiết đoạn nhiệt. Phương trình (4.65) chính là phương trình động lượng tử cho hàm phân bố không cân bằng của điện tử giam cầm trong dây lượng tử khi có sự giam cầm phonon.

4.4.3. Hệ số hấp thụ sóng điện từ mạnh bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật khi có sự giam cầm phonon

Để tính toán hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử có xét đến sự giam cầm của phonon, trước hết chúng ta tìm hàm phân bố điện tử không cân bằng từ việc giải phương trình động lượng tử (5.11). Tương tự các chương trước, để đơn giản cho việc giải phương trình này, phương pháp lặp xấp xỉ gần đúng:

$$n_{n,\ell,\bar{p}}(t_2) \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}; \quad n_{n,\ell,\bar{p}+\bar{q}}(t_2) \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}; \quad n_{n,\ell,\bar{p}-\bar{q}}(t_2) \approx \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}$$

Tích phân hai vế của (4.65) ta được:

$$\begin{aligned}
n_{n,\ell,\bar{p}}(t) = & \sum_{m,k,\bar{q}} \sum_{n_1,\ell_1} |C_{\bar{q}}^{m,k}|^2 |I_{n_1,\ell_1,n,\ell}^{m,k}|^2 \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} J_r\left(\frac{e\vec{E}_0\bar{q}}{m^*\Omega^2}\right) J_{r+s}\left(\frac{e\vec{E}_0\bar{q}}{m^*\Omega^2}\right) \frac{1}{s\Omega} \times \\
& \times \exp(is\Omega t) \left[-\frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)N_{m,k,\bar{q}} - \bar{n}_{n_1,\ell_1,\bar{p}+\bar{q}}(t_2)(N_{m,k,\bar{q}}+1)}{\varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p}+\bar{q}) - \varepsilon_{n,\ell}(\bar{p}) - \omega_o - r\Omega + i\delta} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(t_2)(N_{m,k,\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n_1,\ell_1,\bar{p}+\bar{q}}(t_2)N_{m,k,\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\ell}(\bar{p}+\bar{q}) - \varepsilon_{n,\ell}(\bar{p}) + \omega_o - r\Omega + i\delta} + \\
& + \frac{\bar{n}_{n_1,\ell_1,\bar{p}-\bar{q}}(t_2)N_{m,k,\bar{q}} - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}(N_{m,k,\bar{q}}+1)}{\varepsilon_{n,\ell}(\bar{p}) - \varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p}-\bar{q}) - \omega_o - r\Omega + i\delta} + \\
& + \frac{\bar{n}_{n_1,\ell_1,\bar{p}-\bar{q}}(t_2)(N_{m,k,\bar{q}}+1) - \bar{n}_{n,\ell,\bar{p}}N_{m,k,\bar{q}}}{\varepsilon_{n,\ell}(\bar{p}) - \varepsilon_{n_1,\ell_1}(\bar{p}-\bar{q}) + \omega_o - r\Omega + i\delta}]. \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Biểu thức (4.66) là biểu thức giải tích của hàm phân bố không cân bằng của điện tử trong dây lượng tử hình chữ nhật khi có sự giam cầm phonon.

Sử dụng biểu thức tính mật độ dòng hạt tải và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ, thực hiện các tính toán cần thiết dựa trên các tính chất của hàm Bessel ta thu được:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{8\pi^2\Omega}{c\sqrt{\chi_\infty}E_0^2} \sum_{n,\ell,n',\ell',m,k} \sum_{\bar{q},\bar{p}} |C_{\bar{q}}^{m,k}|^2 |I_{n,\ell,n',\ell'}^{m,k}(q_z)|^2 N_{\bar{q}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} [\bar{n}_{n,\ell,\bar{p}} - \bar{n}_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}}] \\
& \times J_s^2\left(\frac{eE_0\bar{q}}{m\Omega^2}\right) \{[\delta(\varepsilon_{n',\ell',\bar{p}+\bar{q}} - \varepsilon_{n,\ell,\bar{p}} + \omega_o - \Omega)] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o]\} \quad (4.67)
\end{aligned}$$

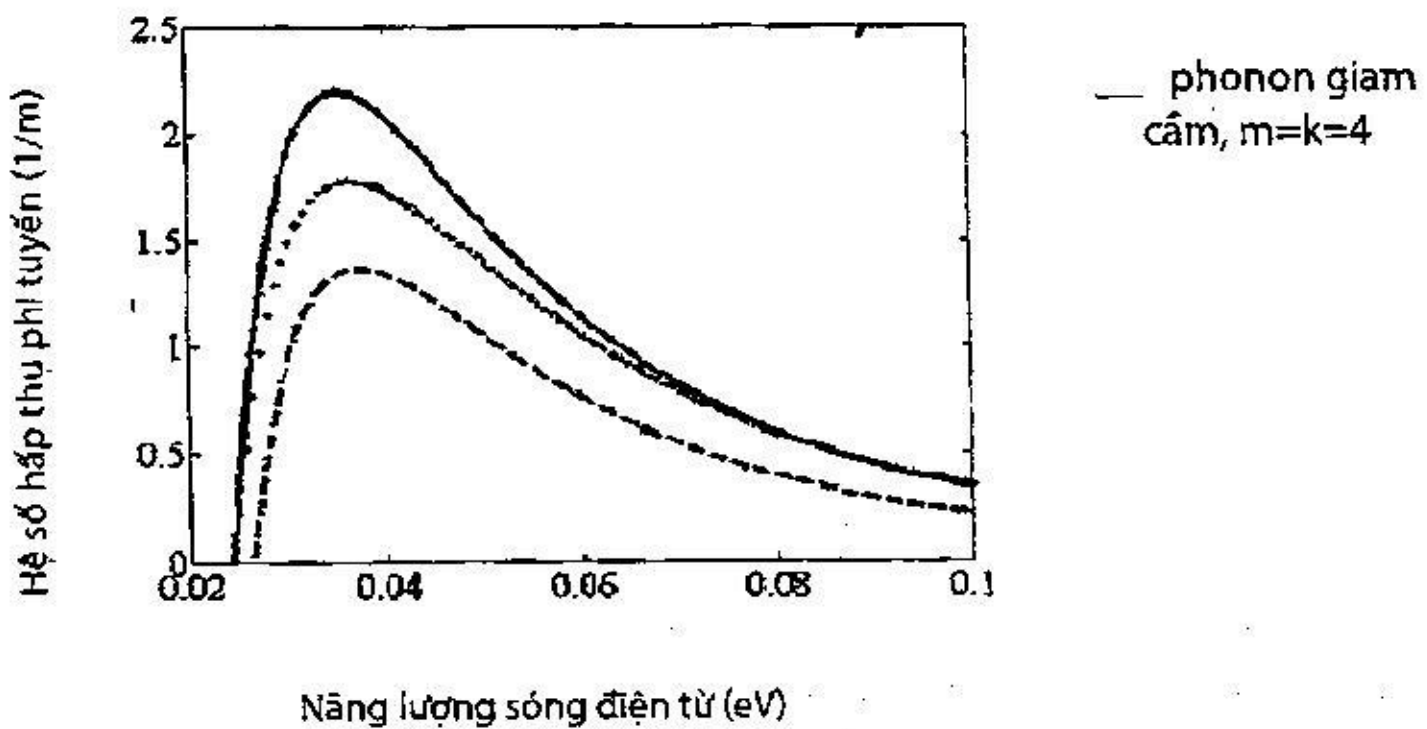
Với mục đích xem xét ảnh hưởng của sự giam cầm phonon đến hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử, trong chương này chúng ta chỉ xem xét với trường hợp hấp thụ gần ngưỡng. Lúc này điều kiện $|\Omega - \omega_o| \ll \bar{\varepsilon}$ được thỏa mãn. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử hình chữ nhật khi có sự giam cầm phonon thu được như sau:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \frac{32e^4\pi^4 n_0 (k_b T)^{3/2}}{c\varepsilon_0 \sqrt{\chi_\infty} \Omega^3 V} \left(\frac{1}{\chi_\infty} - \frac{1}{\chi_0}\right) \sum_{n,\ell,n',\ell',m,k} |P_{m,k}^2| \exp\left\{\frac{\pi^2}{2mk_b T} \left(\frac{n'^2}{L_x^2} + \frac{\ell'^2}{L_y^2}\right)\right\} \\
& \times \{[\exp\left\{\frac{1}{k_b T}(\omega_o - \Omega)\right\} - 1][1 + \frac{3e^2 E_0^2 k_b T}{8m_e \Omega^4} (1 + \frac{B}{2k_b T})] + [\omega_o \rightarrow -\omega_o]\} \quad (4.68)
\end{aligned}$$

trong đó $B = \pi^2[(\tilde{n}^2 - n^2)/L_x^2 + (\tilde{\ell}^2 - \ell^2)/L_y^2]/2m_e + \omega_0 - \Omega$, $P_{m,k}$ là tích phân được xác định theo (4.58). Từ (4.68) ta thấy rằng sự giam cầm phonon trong dây lượng tử đã làm thay đổi hệ số tương tác giữa điện tử và phonon dẫn đến hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử cũng thay đổi, trong biểu thức của hệ số hấp thụ xuất hiện các chỉ số lượng tử của phonon giam cầm. Để thấy rõ sự ảnh hưởng của phonon giam cầm lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử bởi điện tử giam cầm trong dây lượng tử, biểu thức của hệ số hấp thụ (4.68) sẽ được tính số ở phần tiếp theo.

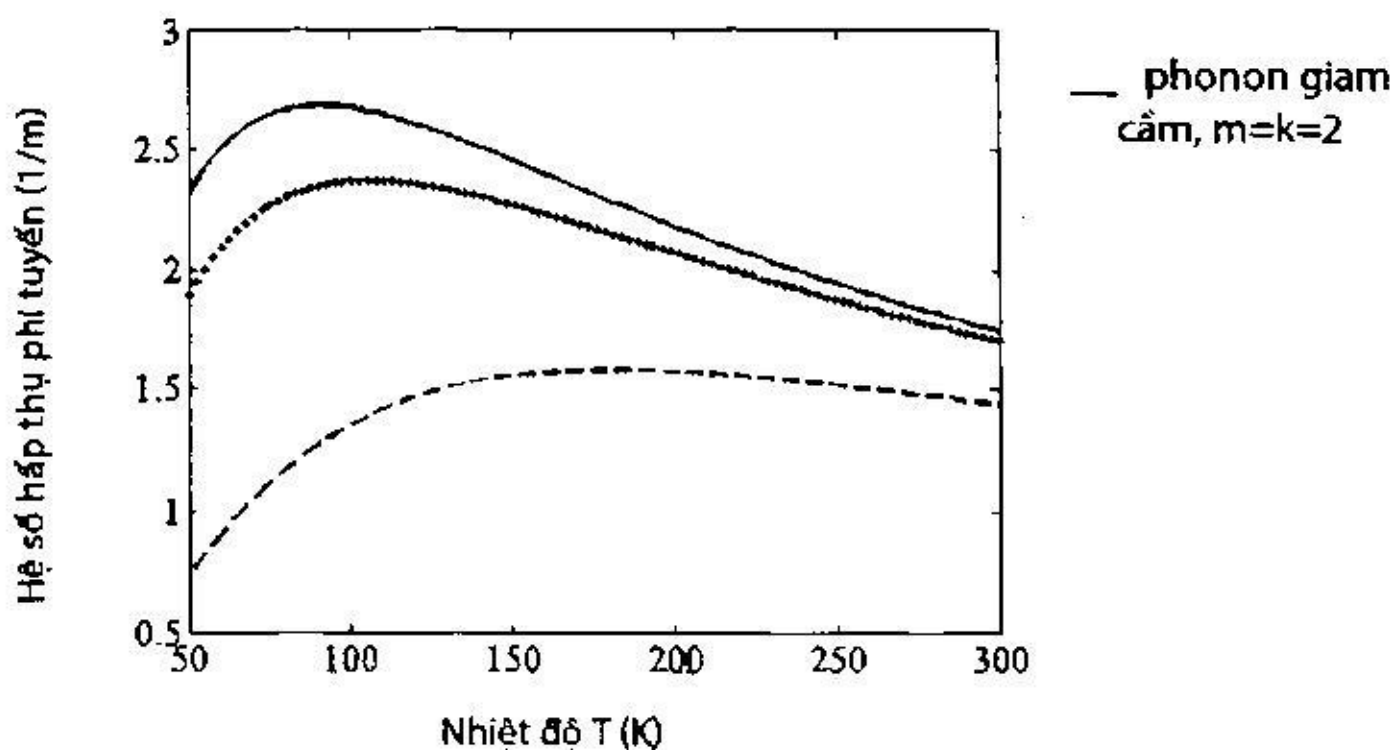
4.4.4. Tính toán số, vẽ đồ thị và thảo luận kết quả

Thực hiện tính số, khảo sát và vẽ đồ thị sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ vào các đại lượng đặc trưng của hệ cho cả hai trường hợp phonon giam cầm (4.68) và phonon không giam cầm (4.64) trên cùng một đồ thị. Các thông số sử dụng được lấy theo Bảng 3.1 (thông số của dây chữ nhật GaAs/GaAsAl).



Hình 4.48: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện tử trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn vào năng lượng photon cho cả hai trường hợp phonon giam cầm và phonon không giam cầm.

Đồ thị trên hình 4.48 biểu diễn sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào năng lượng sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn cả hai trường hợp phonon giam cầm và phonon không giam cầm. Ta có thể nhận thấy rằng trong cả hai trường hợp phonon giam cầm và phonon khối, hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ đều có được giá trị cực đại khi tần số sóng điện từ trùng với tần số của phonon quang ($\hbar\Omega = \hbar\omega_0 = 0,03625\text{eV}$), sự thay đổi chỉ số lượng tử của phonon cũng không làm thay đổi giá trị này của tần số sóng điện từ. Như vậy, sự giam cầm phonon trong dây lượng tử không làm thay đổi định tính về sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào tần số sóng điện từ. Tuy nhiên đã có sự thay đổi định lượng của hệ số hấp thụ phi tuyến. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong trường hợp phonon giam cầm lớn hơn, điều này cũng được thấy trong hình 33, nếu thay đổi chỉ số lượng tử của phonon giam cầm, hệ số hấp thụ phi tuyến cũng thay đổi theo tỉ lệ thuận.



Hình 4.49: Sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật hố thế cao vô hạn vào nhiệt độ T cho cả hai trường hợp phonon giam cầm và phonon không giam cầm.

Đồ thị trên hình 4.49 cho ta thấy sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ vào nhiệt độ của hệ cho cả hai trường hợp phonon giam cầm và phonon khối. Về mặt định tính, hình dạng của các đường

cong này gần như giống nhau và đều có được đỉnh hấp thụ cực đại. Tuy nhiên, khi có sự giam cầm phonon cũng như khi chỉ số lượng tử của phonon giam cầm tăng lên, các đỉnh hấp thụ được thể hiện rõ nét và nhọn hơn, đồng thời các đỉnh hấp thụ dịch chuyển về phía có nhiệt độ thấp hơn. Hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ khi có sự giam cầm phonon cũng lớn hơn.

Kết luận:

Nghiên cứu ảnh hưởng của phonon giam cầm lên hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ trong dây lượng tử: kết quả thu được biểu thức của phương trình động lượng tử cho điện từ trong dây lượng tử hình chữ nhật khi có sự giam cầm phonon và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ cũng được thiết lập cho trường hợp tán xạ điện từ giam cầm-phonon quang giam cầm. Kết quả giải tích được tính số và cho thấy rằng sự giam cầm phonon trong dây lượng tử không làm thay đổi định tính sự phụ thuộc của hệ số hấp thụ phi tuyến vào các tham số của hệ. Tuy nhiên nó đã ảnh hưởng định lượng và hệ số hấp thụ phi tuyến sóng điện từ khi có sự giam cầm phonon là lớn hơn. Đỉnh hấp thụ cũng dịch chuyển về phía nhiệt độ thấp khi có sự giam cầm phonon.

Phụ lục

XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG TỬ CHO ĐIỆN TỬ VÀ TÌM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG TỬ

Trong phần này, chúng ta sẽ xây dựng phương trình động lượng tử cho điện tử trong bán dẫn khi có mặt trường sóng điện từ.

Hamiltonian của hệ khi đó có dạng:

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} + \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} + \sum_{\vec{p}, \vec{k}} c_{\vec{k}} a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} (b_{\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^+) + \sum_{\vec{k}} \varphi(\vec{k}) a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} \quad (1)$$

trong đó, $\frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}$ là Hamiltonian của hệ điện tử trong

điện từ trường; $a_{\vec{p}}^+$ ($a_{\vec{p}}$) là toán tử sinh (huỷ) điện tử với vectơ xung

lượng $\vec{p}$; $b_{\vec{k}}^+$ ($b_{\vec{k}}$) là toán tử sinh (huỷ) phonon với vectơ sóng $\vec{k}$;

$\sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}$ là Hamiltonian hệ các dao động điện tử điều hoà không

tương tác (ta sử dụng hệ đo $\hbar=1$); $\sum_{\vec{p}, \vec{k}} c_{\vec{k}} a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} (b_{\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^+)$ là toán tử mô

tả tương tác điện tử - phonon với $c_{\vec{k}}$ là hằng số tương tác điện tử -

phonon phụ thuộc vào cơ chế tán xạ; $\sum_{\vec{k}} \varphi(\vec{k}) a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}}$ là toán tử mô tả

tương tác giữa điện tử và điện tử; m là khối lượng điện tử; e là điện tích

của điện từ; $\vec{A}(t)$ là thế vectơ, và tương ứng với sóng điện từ (bức xạ laser) ta có:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \Omega t = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \quad (2)$$

Các toán tử sinh, hủy điện từ (hạt fermion) thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$[a_i, a_k^+] = a_i a_k^+ + a_k^+ a_i = \delta_{i,k} \quad (3.a)$$

$$[a_i^+, a_k^+] = \{a_i, a_k\} = 0 \quad (3.b)$$

Các toán tử sinh, hủy phonon (hạt boson) thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$[b_i, b_k^+] = b_i b_k^+ - b_k^+ b_i = \delta_{i,k} \quad (4.a)$$

$$[b_i^+, b_k^+] = [b_i, b_k] = 0 \quad (4.b)$$

(Toán tử số hạt của điện từ là: $n_p = a_p^+ a_p$).

Sử dụng phương trình chuyển động của toán tử thống kê hay ma trận mật độ, ta được phương trình động lượng tử cho điện từ:

$$\frac{i\partial n_p(t)}{\partial t} = \frac{i\partial \left\langle a_p^+ a_p \right\rangle_t}{\partial t} = \left\langle \left[a_p^+ a_p, H \right] \right\rangle \quad (5)$$

Dưới đây chúng ta tính các giao hoán tử ở vế phải của (5):

Tính số hạng thứ nhất:
$$\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^-, \frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}'} \left[\vec{p}' - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}'}^- \right]$$

Sử dụng (3a), (3b) ta có biến đổi sau:

$$\begin{aligned} \left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-, a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}'}^- \right] &= a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}'}^- - a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}'}^- a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- \\ &= a_{\vec{p}}^+ \left(\delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- \right) a_{\vec{p}'}^- - a_{\vec{p}'}^+ \left(\delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- \right) a_{\vec{p}}^- \\ &= a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}'}^- - a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} + a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- a_{\vec{p}}^- \\ &= a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}'}^- - a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} + a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- a_{\vec{p}}^- \end{aligned}$$

Do đó:
$$\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-, a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}'}^- \right] = a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'}$$

Thay kết quả trên vào số hạng thứ nhất ta có:

$$\begin{aligned} \left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-, \frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}'} \left[\vec{p}' - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}'}^- \right] &= \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}'} \left[\vec{p}' - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - \frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}'} \left[\vec{p}' - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}'}^+ a_{\vec{p}}^- \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \\ &= \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- - \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- = 0; \end{aligned}$$

$$\left(\delta_{\vec{p}, \vec{p}'} = \begin{cases} 1, & \text{Khi } \vec{p} = \vec{p}' \\ 0, & \text{Khi } \vec{p} \neq \vec{p}' \end{cases} \right)$$

Kết quả là:

$$\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \frac{1}{2m} \sum_{\vec{p}'} \left[\vec{p}' - \frac{e}{c} \vec{A}(t) \right]^2 a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'} \right] = 0 \quad (6)$$

Tính số hạng thứ hai: $\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} \right]$

Ta có:

$$\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} \right] = a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} - b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} = 0$$

Như vậy ta có:

$$\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} \right] = 0 \quad (7)$$

Tính số hạng thứ ba: $\left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, \sum_{\vec{p}', \vec{k}} C_{\vec{k}} a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} (b_{\vec{k}}^+ + b_{-\vec{k}}^+) \right]$

Sử dụng (3a), (3b) ta có biến đổi sau:

$$\begin{aligned} \left[a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}'} \right] &= a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \\ &= a_{\vec{p}}^+ \left(\delta_{\vec{p}, \vec{p}'+\vec{k}} - a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} \right) a_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ \left(\delta_{\vec{p}, \vec{p}'} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'} \right) a_{\vec{p}} \\ &= a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'+\vec{k}} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'} + a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}} - a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} \\ &= a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'+\vec{k}} - a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'} - a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} + a_{\vec{p}} a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}'} a_{\vec{p}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \left[\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^-}{\bar{p}}, \frac{a^+}{\bar{p}'+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}'} \right] = \frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^-}{\bar{p}'} \delta_{\bar{p}, \bar{p}'+\bar{k}} - \frac{a^+}{\bar{p}'+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} \delta_{\bar{p}', \bar{p}}$$

Thay kết quả trên vào số hạng thứ 3 ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^-}{\bar{p}}, \sum_{\bar{p}', \bar{k}} C_{\bar{k}} \frac{a^+}{\bar{p}'+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}'} (b_{\bar{k}}^- + b_{-\bar{k}}^+) \right] &= \\ &= \sum_{\bar{p}', \bar{k}} C_{\bar{k}} \left(\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^-}{\bar{p}'} \delta_{\bar{p}, \bar{p}'+\bar{k}} - \frac{a^+}{\bar{p}'+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} \delta_{\bar{p}', \bar{p}} \right) (b_{\bar{k}}^- + b_{-\bar{k}}^+) \end{aligned}$$

Lấy tổng theo $\bar{p}'$ với lưu ý:

$$\delta_{\bar{p}, \bar{p}'+\bar{k}} = 1 \text{ khi } \bar{p} = \bar{p}'+\bar{k} \text{ hay } \bar{p}' = \bar{p}-\bar{k} \text{ và } \delta_{\bar{p}', \bar{p}} = 1 \text{ khi}$$

$\bar{p}' = \bar{p}$, kết hợp sử dụng (3a) ta được:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^-}{\bar{p}}, \sum_{\bar{p}', \bar{k}} C_{\bar{k}} \frac{a^+}{\bar{p}'+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}'} (b_{\bar{k}}^- + b_{-\bar{k}}^+) \right] &= \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}} \left(\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^+}{\bar{p}-\bar{k}} - \frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} \right) (b_{\bar{k}}^- + b_{-\bar{k}}^+) \\ &= \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}} \left(\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^+}{\bar{p}-\bar{k}} b_{\bar{k}}^- + \frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^-}{\bar{p}-\bar{k}} b_{-\bar{k}}^+ - \frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} b_{\bar{k}}^- - \frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} b_{-\bar{k}}^+ \right) \\ &= \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}} \left(\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^+}{\bar{p}-\bar{k}} b_{\bar{k}}^- + \frac{a^-}{\bar{p}-\bar{k}} \frac{a^+}{\bar{p}} b_{-\bar{k}}^+ - \frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} b_{\bar{k}}^- - \frac{a^-}{\bar{p}} \frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} b_{-\bar{k}}^+ \right) \\ &= \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}} \left[\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^+}{\bar{p}-\bar{k}} b_{\bar{k}}^- + \left(\frac{a^+}{\bar{p}-\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} b_{-\bar{k}}^+ \right)^* - \left(\frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} \frac{a^-}{\bar{p}} b_{\bar{k}}^- \right) - \left(\frac{a^+}{\bar{p}} \frac{a^+}{\bar{p}+\bar{k}} b_{-\bar{k}}^+ \right)^* \right] \quad (8) \end{aligned}$$

Như vậy ta có:

$$\left\langle \left[\frac{a_p^+ a_p}{p} \sum_{\vec{p}', \vec{k}} C_{\vec{k}} \frac{a_{\vec{p}'+\vec{k}}^+}{\vec{p}'+\vec{k}} \frac{a_{\vec{p}'}}{\vec{p}'} (b_{\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^+) \right] \right\rangle_t =$$

$$= - \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} \left[F_{\vec{p}+\vec{k}, \vec{p}, \vec{k}}(t) + F_{\vec{p}, \vec{p}+\vec{k}, -\vec{k}}^*(t) - F_{\vec{p}, \vec{p}-\vec{k}, \vec{k}}(t) - F_{\vec{p}-\vec{k}, \vec{p}, -\vec{k}}^*(t) \right]$$
(9)

ở đây ta kí hiệu:

$$F_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}}(t) = \left\langle \frac{a_{\vec{p}_1}^+ a_{\vec{p}_2} b_{\vec{q}}}{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{q}} \right\rangle_t$$
(10)

Vì chúng ta đang xét phương trình động lượng tử cho điện tử trong bán dẫn khối nên có thể coi tương tác giữa e-e là rất nhỏ so với tương tác giữa các hạt khác loại (Tương tác này chỉ được tính đến trong tương tác plasma rắn).

Sau đây chúng ta thiết lập phương trình cho $F(t)$

Dưới đây để đơn giản, ta ký hiệu $\vec{p}_i \equiv p_i; \vec{k} \equiv k; \vec{q} \equiv q$. Theo trên ta có:

$$F_{p_1, p_2, q}(t) = \left\langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \right\rangle_t$$
(11)

Đạo hàm hai vế theo t ta có: $i \frac{\partial F}{\partial t} = i \frac{\partial \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle_t}{\partial t} = \langle [F, H] \rangle_t$

(12)

$$\Leftrightarrow i \frac{\partial \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle_t}{\partial t} = \langle [a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, H] \rangle_t$$
(13)

với

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{p_3} \left[p_3 - \frac{e}{c} A(t) \right]^2 a_{p_3}^+ a_{p_3} + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k + \sum_{p, k} c_k a_{p+k}^+ a_p (b_k^+ + b_k) + \sum_k \varphi(k) a_{p+k}^+ a_p$$

Tính toán số hạng thứ nhất:

$$I_1 = \left\langle \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, \frac{1}{2m} \sum_{p_3} \left[p_3 - \frac{e}{c} A(t) \right]^2 a_{p_3}^+ a_{p_3} \right] \right\rangle_t = \left\langle \frac{1}{2m} \sum_{p_3} \left[p_3 - \frac{e}{c} A(t) \right]^2 [a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, a_{p_3}^+ a_{p_3}] \right\rangle_t$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= [a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, a_{p_3}^+ a_{p_3}] \\ &= a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q a_{p_3}^+ a_{p_3} - a_{p_3}^+ a_{p_3} a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\ &= a_{p_1}^+ (a_{p_2} a_{p_3}^+) a_{p_3} b_q - a_{p_3}^+ (a_{p_3} a_{p_1}^+) a_{p_2} b_q \\ &= a_{p_1}^+ (\delta_{p_2, p_3} - a_{p_3}^+ a_{p_2}) a_{p_3} b_q - a_{p_3}^+ (\delta_{p_3, p_1} - a_{p_1}^+ a_{p_3}) a_{p_2} b_q \\ &= a_{p_1}^+ \delta_{p_2, p_3} a_{p_3} b_q - a_{p_3}^+ a_{p_2} a_{p_3} b_q - a_{p_3}^+ \delta_{p_3, p_1} a_{p_2} b_q + a_{p_1}^+ a_{p_3} a_{p_2} b_q \\ &= a_{p_1}^+ a_{p_3} b_q \delta_{p_2, p_3} - a_{p_3}^+ a_{p_2} b_q \delta_{p_3, p_1} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\langle \frac{1}{2m} \sum_{p_3} \left[p_3 - \frac{e}{c} A(t) \right]^2 [a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \delta_{p_2, p_3} - a_{p_3}^+ a_{p_2} b_q \delta_{p_3, p_1}] \right\rangle_t \\ &= \frac{1}{2m} \left[p_2 - \frac{e}{c} A(t) \right]^2 \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle_t - \frac{1}{2m} \left[p_1 - \frac{e}{c} A(t) \right]^2 \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle_t \end{aligned}$$

vì $p_3 = p_2; p_3 = p_1$

$$\text{Vậy: } I_1 = \left[\frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{e}{mc} (p_2 - p_1) A(t) \right] \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle_t \quad (15)$$

Tính số hạng thứ hai:

$$I_2 = \left\langle \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, \sum_{k_1} \omega_{k_1} b_{k_1}^+ b_{k_1} \right] \right\rangle_t = \left\langle \sum_{k_1} \omega_{k_1} [a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, b_{k_1}^+ b_{k_1}] \right\rangle_t$$

Xét:

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \left\langle \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, b_{k_1}^+ b_{k_1} \right] \right\rangle_i \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q b_{k_1}^+ b_{k_1} - b_{k_1}^+ b_{k_1} a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} (\delta_{q,k_1} + b_{k_1}^+ b_q) b_{k_1} - b_{k_1}^+ b_{k_1} a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} b_{k_1} \delta_{q,k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_2} b_{k_1}^+ b_q b_{k_1} - b_{k_1}^+ b_{k_1} a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} b_{k_1} \delta_{q,k_1}
\end{aligned} \tag{16}$$

Ta được

$$I_2 = \left\langle \sum_{k_1} \omega_{k_1} \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, b_{k_1}^+ b_{k_1} \right] \right\rangle_i = \omega_q \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_{k_1} \rangle_i \tag{17}$$

Tính số hạng thứ ba:

$$I_3 = \left\langle \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, \sum_{p_3, k_1} c_{k_1} a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) \right] \right\rangle_i \tag{18}$$

Xét hệ thức giao hoán:

$$\begin{aligned}
I_{31} &= \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) \right] \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_{k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_{-k_1} - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_q b_{k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_q b_{-k_1} - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_q b_{k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (\delta_{q,-k_1} - b_{-k_1} b_q) - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
I_{31} &= a_{p_1}^+ (\delta_{p_2, p_3+k_1} - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2}) a_{p_3} b_q b_{k_1} + a_{p_1}^+ (\delta_{p_2, p_3+k_1} - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2}) a_{p_3} (\delta_{q,-k_1} - b_{-k_1} b_q) - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_3} b_q b_{k_1} \delta_{p_2, p_3+k_1} - a_{p_1}^+ a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} a_{p_3} b_q b_{k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_3} \delta_{q,-k_1} \delta_{p_2, p_3+k_1} - a_{p_1}^+ a_{p_3} \delta_{p_2, p_3+k_1} a_{p_3} b_{-k_1} b_q + a_{p_1}^+ a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} a_{p_3} \delta_{q,-k_1} - \\
&\quad - a_{p_1}^+ a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} a_{p_3} b_{-k_1} b_q - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \\
&= a_{p_1}^+ a_{p_3} b_q b_{k_1} \delta_{p_2, p_3+k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_3} \delta_{q,-k_1} \delta_{p_2, p_3+k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_3} \delta_{p_2, p_3+k_1} b_{-k_1} b_q - a_{p_1}^+ a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} a_{p_3} \delta_{q,-k_1} - \\
&\quad - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_q b_{k_1} \delta_{p_1, p_3} - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} b_q b_{-k_1} \delta_{p_1, p_3+k_1}
\end{aligned} \tag{19}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \left\langle \left[a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q, \sum_{p_1, k_1} c_{k_1} a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} (b_{k_1} + b_{-k_1}) \right] \right\rangle, \\
 &= \left\langle \sum_{p_1, k_1} c_{k_1} (a_{p_1}^+ a_{p_3} b_q b_{k_1} \delta_{p_1, p_3+k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_3} \delta_{q, -k_1} \delta_{p_2, p_3+k_1} + a_{p_1}^+ a_{p_1}^+ \delta_{p_2, p_3+k_1} b_{-k_1} b_q - a_{p_1}^+ a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} a_{p_3} \delta_{q, -k_1} \right. \\
 &\quad \left. - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_3} b_{k_1} b_q \delta_{p_1, p_3} - a_{p_3+k_1}^+ a_{p_2} b_q b_{-k_1} \delta_{p_2, p_3+k_1}) \right\rangle, \\
 &= -\sum_{p_3} c_{-q} \langle a_{p_1}^+ a_{p_3-q}^+ a_{p_2} a_{p_3} \rangle, -\sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1+k_1}^+ a_{p_2} (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) b_q \rangle, +\sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1}^+ a_{p_2-k_1} b_q (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) \rangle,
 \end{aligned} \tag{20}$$

Thay các kết quả trên vào phương trình đầu tiên, chúng ta nhận được:

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial F}{\partial t} &= -\left[\frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \omega_q - \frac{e}{mc} (p_2 - p_1) A(t) \right] \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle, -\sum_{p_3} c_{-q} \langle a_{p_1}^+ a_{p_3-q}^+ a_{p_2} a_{p_3} \rangle, \\
 &\quad -\sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1+k_1}^+ a_{p_2} (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) b_q \rangle, +\sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1}^+ a_{p_2-k_1} b_q (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) \rangle, \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} &= i \left[\frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \omega_q - \frac{e}{mc} (p_2 - p_1) A(t) \right] \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle, +i \sum_{p_3} c_{-q} \langle a_{p_1}^+ a_{p_3-q}^+ a_{p_2} a_{p_3} \rangle, \\
 &\quad +i \sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1+k_1}^+ a_{p_2} (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) b_q \rangle, -i \sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1}^+ a_{p_2-k_1} b_q (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) \rangle,
 \end{aligned}$$

Bỏ qua số hạng thứ 2 trong công thức trên do rất nhỏ so với 1, ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial t} &= i \left[\frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \omega_q - \frac{e}{mc} (p_2 - p_1) A(t) \right] \langle a_{p_1}^+ a_{p_2} b_q \rangle, + \\
 &\quad i \sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1+k_1}^+ a_{p_2} (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) b_q \rangle, -i \sum_{k_1} c_{k_1} \langle a_{p_1}^+ a_{p_2-k_1} b_q (b_{k_1} + b_{-k_1}^+) \rangle,
 \end{aligned}$$

Trước tiên, ta giải phương trình vi phân cấp 1:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = i \left[\frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \omega_q - \frac{e}{mc} (p_2 - p_1) A(t) \right] F(t)$$

$$\frac{\partial F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t)}{\partial t} = i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_{\bar{q}} - \frac{e}{m^* c} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t) \right] F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t)$$

$$+i \sum_{\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[\left\langle a_{p_1+\bar{q}}^+ a_{p_2} \left(b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+ \right) b_{\bar{q}} \right\rangle_t - \left\langle a_{p_1}^+ a_{p_2-\bar{q}} b_{\bar{q}} \left(b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+ \right) \right\rangle_t \right] \quad (21)$$

Lưu ý phương trình (21) là phương trình vi phân tuyến tính cấp một, không thuần nhất của hàm $F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t)$. Để giải phương trình này trước tiên ta giải phương trình vi phân thuần nhất:

$$\frac{\partial F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t)}{\partial t} = i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_{\bar{q}} - \frac{e}{m^* c} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t) \right] F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t) \quad (22)$$

Dùng phương pháp phân li biến số, ta có:

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t_1)}{F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t_1)} = i \int_{-\infty}^t \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_{\bar{q}} - \frac{e}{m^* c} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) \right] dt_1$$

$$\ln F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t_1) \Big|_{-\infty}^t = i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_{\bar{q}} \right] \int_{-\infty}^t dt_1 - \frac{ie}{m^* c} \int_{-\infty}^t (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1$$

Sử dụng điều kiện ban đầu (điều kiện đoạn nhiệt):

$$\ln F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}} \Big|_{-\infty} = 0$$

Ta có nghiệm

$$F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t) = M \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_{\bar{q}} \right] \int_{-\infty}^t dt_1 - \frac{ie}{m^* c} \int_{-\infty}^t (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1 \right\} \quad (23)$$

Trong đó M là một hằng số phụ thuộc thời gian, ta ký hiệu $M(t)$ và:

$$F(t) = M(t) F(t) \quad (24)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{\partial M(t)}{\partial t} F(t) + M(t) \frac{\partial F(t)}{\partial t} \quad (25)$$

Thay (25) vào (21) ta có:

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} F(t) + M(t) \frac{\partial F(t)}{\partial t} = i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_q - \frac{e}{m^* c} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t) \right] M(t) F(t) +$$

$$+ i \sum_{\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[\left\langle a_{\bar{p}_1 + \bar{q}}^+ a_{\bar{p}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_t - \left\langle a_{\bar{p}_1}^+ a_{\bar{p}_2 - \bar{q}} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_t \right]$$

Thay $\frac{\partial F_{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{q}}(t)}{\partial t}$ từ (22) vào số hạng thứ hai ở vế trái, ta sẽ giản ước được số hạng thứ nhất ở vế phải, do đó:

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} F(t) = i \sum_{\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[\left\langle a_{\bar{p}_1 + \bar{q}}^+ a_{\bar{p}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_t - \left\langle a_{\bar{p}_1}^+ a_{\bar{p}_2 - \bar{q}} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_t \right] \quad (26)$$

Thay F(t) từ (23) vào ta có:

$$\frac{\partial M(t)}{\partial t} \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_q \right] \int_{-\infty}^t dt_1 - \frac{ie}{m^* c} \int_{-\infty}^t (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1 \right\}$$

$$= i \sum_{\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[\left\langle a_{\bar{p}_1 + \bar{q}}^+ a_{\bar{p}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_t - \left\langle a_{\bar{p}_1}^+ a_{\bar{p}_2 - \bar{q}} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_t \right] \quad (27)$$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$M(t) = i \int_{-\infty}^t \sum_{\bar{q}} C_{\bar{q}} \left[\left\langle a_{\bar{p}_1 + \bar{q}}^+ a_{\bar{p}_2} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) b_{\bar{q}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\bar{p}_1}^+ a_{\bar{p}_2 - \bar{q}} b_{\bar{q}} (b_{\bar{q}} + b_{-\bar{q}}^+) \right\rangle_{t_2} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ -i \left[\varepsilon(\bar{p}_1) - \varepsilon(\bar{p}_2) - \omega_q \right] \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 + \frac{ie}{m^* c} \int_{-\infty}^{t_2} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \bar{A}(t_1) dt_1 \right\} dt_2 \quad (28)$$

Thay (26) vào (24) ta thu được biểu thức cho F(t):

$$\begin{aligned}
F(t) = & i \int_{-\infty}^t \sum_{\vec{q}} C_{\vec{q}} \left[\left\langle a_{\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{q}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}-\vec{q}} b_{\vec{q}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \right\rangle_{t_2} \right] \times \\
& \times \exp \left\{ -i \left[\varepsilon(\vec{p}_1) - \varepsilon(\vec{p}_2) - \omega_{\vec{q}} \right] \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 + \frac{ie}{m^* c} \int_{-\infty}^{t_2} (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{A}(t) d(t_1) \right\} dt_2 \times \\
& \times \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}_1) - \varepsilon(\vec{p}_2) - \omega_{\vec{q}} \right] \int_{-\infty}^t dt_1 - \frac{ie}{m^* c} \int_{-\infty}^t (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{A}(t_1) dt_1 \right\} \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\vec{p}, \vec{p}_2, \vec{q}} = & i \int_{-\infty}^t \sum_{\vec{q}} C_{\vec{q}} \left[\left\langle a_{\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{q}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}-\vec{q}} b_{\vec{q}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \right\rangle_{t_2} \right] \times \\
& \times \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}_1) - \varepsilon(\vec{p}_2) - \omega_{\vec{q}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \vec{A}(t_1) dt_1 \right\} dt_2 \quad (30)
\end{aligned}$$

Thay vào (12) ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{\vec{p}}(t)}{\partial(t)} = & (i)^2 \sum_{\vec{q}, \vec{k}} C_{\vec{k}} C_{\vec{q}} \\
& \times \int_{-\infty}^t \left[\left\langle a_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{k}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}-\vec{q}} b_{\vec{k}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \right\rangle_{t_2} \right] \times \\
& \times \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \varepsilon(\vec{p}) - \omega_{\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t \vec{k} \vec{A}(t_1) dt_1 \right\} dt_2 - \\
& - (i)^2 \sum_{\vec{q}, \vec{k}} C_{\vec{q}}^* C_{\vec{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-\infty}^t \left[\left\langle a_{\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{k}} \right\rangle_{t_2}^* - \left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{k}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \right\rangle_{t_2}^* \right] \times \\
& \times \exp \left\{ -i \left[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon(\vec{p} - \vec{q}) - \omega_{-\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t \vec{q} A(t_1) dt_1 \right\} dt_2 - \\
& - (i)^2 \sum_{\vec{q}_1, \vec{k}} C_{\vec{q}_1} C_{\vec{k}} \\
& \times \int_{-\infty}^t \left[\left\langle a_{\vec{p}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{k}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{k}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \right\rangle_{t_2} \right] \times \\
& \times \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon(\vec{p} - \vec{q}) - \omega_{\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t \vec{q} A(t_1) dt_1 \right\} dt_2 + \\
& + (i)^2 \sum_{\vec{k}, \vec{q}_1} C_{\vec{q}_1} C_{\vec{k}} \\
& \times \int_{-\infty}^t \left[\left\langle a_{\vec{p}+\vec{k}+\vec{q}}^+ a_{\vec{p}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) b_{\vec{k}} \right\rangle_{t_2}^* - \left\langle a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}+\vec{q}} b_{\vec{k}} \left(b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+ \right) \right\rangle_{t_2}^* \right] \times \\
& \times \exp \left\{ -i \left[\varepsilon(\vec{p} - \vec{q}) - \varepsilon(\vec{p}) - \omega_{\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t \vec{q} A(t_1) dt_1 \right\} dt_2
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_{\vec{p}}(t)}{\partial(t)} = & - \sum_{\vec{k}} |C_{\vec{k}}|^2 \int_{-\infty}^t dt_2 \left\{ \left[\left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \left(b_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^+ \right) b_{\vec{k}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}} b_{\vec{k}} \left(b_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^+ \right) \right\rangle_{t_2} \right] \right. \\
& \times \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p} + \vec{k}) - \varepsilon(\vec{p}) - \omega_{\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^* c} \int_{t_2}^t \vec{k} A(t_1) dt_1 \right\} \\
& + \left[\left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \left(b_{-\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}^+ + b_{-\vec{k}} b_{-\vec{k}}^+ \right) \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}} \left(b_{\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}}^+ + b_{-\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}} \right) \right\rangle_{t_2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ -i \left[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon(\vec{p} + \vec{q}) - \omega_{-\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^*c} \int_{t_2}^t \vec{k} A(t_1) dt_1 \right\} \\
& - \left[\left\langle a_{\vec{p}-\vec{k}}^+ a_{\vec{p}-\vec{k}} (b_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^+) b_{\vec{k}} \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}-\vec{k}} (b_{-\vec{k}} + b_{\vec{k}}^+) \right\rangle_{t_2} \right] \\
& \times \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon(\vec{p} - \vec{q}) - \omega_{\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^*c} \int_{t_2}^t \vec{k} A(t_1) dt_1 \right\} \\
& + \left[\left\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} (b_{\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}}) \right\rangle_{t_2} - \left\langle a_{\vec{p}-\vec{k}}^+ a_{\vec{p}-\vec{k}} (b_{-\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}^+ + b_{-\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}}) \right\rangle_{t_2} \right] \\
& \times \exp \left\{ -i \left[\varepsilon(\vec{p} - \vec{q}) - \varepsilon(\vec{p}) - \omega_{\vec{k}} \right] (t - t_2) - \frac{ie}{m^*c} \int_{t_2}^t \vec{k} A(t_1) dt_1 \right\} \Bigg\} \quad (32)
\end{aligned}$$

Ta tính

$$\begin{aligned}
\exp \left[-\frac{ie}{mc} \vec{k} \int_{t_2}^t \vec{A}(t_1) dt_1 \right] &= \exp \left[-i \frac{e \vec{E}_0 \vec{k}}{m \Omega^2} (\sin \Omega t - \sin \Omega t_2) \right] \\
&= \exp \left[i \frac{e \vec{E}_0 \vec{k}}{m \Omega^2} (\sin \Omega t_2 - \sin(-\Omega t)) \right]
\end{aligned}$$

Sử dụng công thức:

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(z) e^{il\varphi}$$

Ta có

$$\exp \left[-\frac{ie}{mc} \vec{k} \int_{t_2}^t \vec{A}(t_1) dt_1 \right] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} J_l \left(\frac{e \vec{E}_0 \vec{k}}{m \Omega^2} \right) J_{l'} \left(\frac{e \vec{E}_0 \vec{k}}{m \Omega^2} \right) \exp(-is \Omega t) \exp(il \Omega t_2)$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_s \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{k}}{m\Omega^2} \right) J_l \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{k}}{m\Omega^2} \right) \exp[i(\ell-s)\Omega t - i\ell\Omega(t-t_2)] \quad (33)$$

Thay (33) vào (32) và sử dụng

$$\langle a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} \rangle_t = n_{\vec{p}}(t), \quad \langle b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} \rangle_t = N_{\vec{k}}(t), \quad \langle b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ \rangle_t = N_{\vec{k}}(t) + 1$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_{\vec{p}}(t)}{\partial(t)} + e\vec{E}_1 \frac{\partial n_{\vec{p}}(t)}{\partial \vec{p}} = - \sum_{\vec{k}} |C_{\vec{k}}|^2 \\ & \sum_{s,l=-\infty}^{+\infty} J_s \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}}{m^* \Omega^2} \right) J_l \left(\frac{e\vec{E}_0 \vec{q}}{m^* \Omega^2} \right) \exp(i(l-s)\Omega t) \times \\ & \times \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \left[n_{\vec{p}}(t') N_{\vec{k}} - n_{\vec{p}+\vec{k}}(t') (N_{\vec{k}} + 1) \right] \right. \\ & \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}+\vec{k}) - \varepsilon(\vec{p}) - \omega_{\vec{k}} - l\Omega + i\delta \right] (t-t') \right\} \\ & + \left[n_{\vec{p}}(t') (N_{\vec{k}} + 1) - n_{\vec{p}+\vec{k}}(t') N_{\vec{k}} \right] \\ & \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}+\vec{q}) - \varepsilon(\vec{p}) + \omega_{\vec{k}} - l\Omega + i\delta \right] (t-t') \right\} \\ & - \left[n_{\vec{p}-\vec{k}}(t') N_{\vec{k}} - n_{\vec{p}}(t') (N_{\vec{k}} + 1) \right] \\ & \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon(\vec{p}-\vec{q}) - \omega_{\vec{q}} - l\Omega + i\delta \right] (t-t') \right\} \\ & - \left[n_{\vec{p}-\vec{k}}(t') (N_{\vec{k}} + 1) - n_{\vec{p}}(t') N_{\vec{k}} \right] \\ & \left. \exp \left\{ i \left[\varepsilon(\vec{p}) - \varepsilon(\vec{p}-\vec{q}) + \omega_{\vec{k}} - l\Omega + i\delta \right] (t-t') \right\} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Sử dụng công thức chuyển phổ Fourier

$$n_{\bar{p}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(t) e^{-i\omega t} dt; \quad n_{\bar{p}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (35)$$

Đặt (35) vào (34)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) + eE_1 \frac{\partial}{\partial \bar{p}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ & = - \sum_{\bar{k}} |C_{\bar{k}}|^2 \sum_{s,l=-\infty}^{\infty} J_s \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) J_l \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) \exp[i(l-s)\Omega t] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left\{ \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega N_{\bar{k}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega (N_{\bar{k}} + 1) \right] \times \right. \\ & \times \exp \left[i(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} - l\Omega + i\delta)(t-t') \right] + \\ & + \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega (N_{\bar{k}} + 1) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega N_{\bar{k}} \right] \times \\ & \times \exp \left[i(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} - l\Omega + i\delta)(t-t') \right] - \\ & - \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega N_{\bar{k}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega (N_{\bar{k}} + 1) \right] \times \\ & \times \exp \left[i(\varepsilon_{\bar{p}} - \varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \omega_{\bar{k}} - l\Omega + i\delta)(t-t') \right] - \\ & - \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega (N_{\bar{k}} + 1) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega N_{\bar{k}} \right] \times \\ & \times \exp \left[i(\varepsilon_{\bar{p}} - \varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} + \omega_{\bar{k}} - l\Omega + i\delta)(t-t') \right] \Big\} \end{aligned} \quad (36)$$

Ta có

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (36a)$$

Đổi thứ tự lấy tích phân trong (36)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots dt' \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dots d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \dots dt'$$

với lưu ý rằng $n_{\bar{p}}(\omega)$, $n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega)$, $N_{\bar{k}}$ không phụ thuộc biến t' , khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \exp \left[-i(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta) t' \right] dt &= \\ &= \frac{\exp \left[-i(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta) t' \right]}{-i(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta)} \Big|_{-\infty}^t \\ &= \frac{i \exp \left[-i(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta) t' \right]}{(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta)} \end{aligned} \quad (36b)$$

Thay (36a), (36b) vào (36) ta có:

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega &= -i \sum_{\bar{k}} |C_{\bar{k}}|^2 \sum_{s,l=-\infty}^{+\infty} J_s \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) J_l \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) \exp [i(l-s)\Omega t] \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \left\{ \left[n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] \frac{1}{(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta)} + \right. \\ &+ \left[n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] \frac{1}{(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} - \omega - l\Omega - i\delta)} - \\ &- \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] \frac{1}{(\varepsilon_{\bar{p}} - \varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \omega_{\bar{k}} - \omega + l\Omega - i\delta)} - \\ &\left. - \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] \frac{1}{(\varepsilon_{\bar{p}} - \varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \omega_{\bar{k}} + \omega + l\Omega + i\delta)} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Lưu ý ta đơn giản như sau:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega} f(\omega) d\omega = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega} g(\omega) d\omega \rightarrow f(\omega) = g(\omega)$$

Đặt

$$\Delta_1^+ = \frac{1}{\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta}$$

$$\Delta_1^- = \frac{1}{\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} - \omega - l\Omega - i\delta}$$

$$\Delta_2^+ = \frac{1}{\varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} + \omega - l\Omega + i\delta}$$

$$\Delta_2^- = \frac{1}{\varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} - \omega - l\Omega - i\delta}$$

Từ (37) ta có

$$\omega n_{\bar{p}}(\omega) = \sum_{\bar{k}} |C_{\bar{k}}|^2 \sum_{s,l=-\infty}^{+\infty} J_s \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) J_l \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) \exp[i(l-s)\Omega t] \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] \Delta_1^+ + \left[n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] \Delta_1^- \\ & + \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] \Delta_2^+ + \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] \Delta_2^- \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Nhận thấy rằng, với $s \neq l$ trong vế phải của (38) sẽ cho đóng góp bậc cao hơn hằng số tương tác điện từ - phonon. Vì vậy ta chỉ xét trường hợp $s = l$ và thực hiện ngắt chuỗi bậc 2 với $C_{\bar{k}}$, ta có:

$$\omega_{\bar{p}}(\omega) = \sum_{\bar{k}} |C_{\bar{k}}|^2 \sum_{s,l=-\infty}^{+\infty} J_l^2 \left(\frac{e\bar{E}_o \bar{k}}{m\Omega^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left[n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] \Delta_1^+ + \left[n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] \Delta_1^- \\ & + \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] \Delta_2^+ + \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] \Delta_2^- \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Do tính chất đối xứng của mạng tinh thể nên thay vectơ sóng $\bar{k} \rightarrow -\bar{k}$ và chuỗi l chạy từ $-\infty \rightarrow +\infty$ nên thay $+l\Omega \rightarrow l\Omega$ suy ra

$$-i\omega_{\bar{p}}(\omega) = i \sum_{\bar{k}} |C_{\bar{k}}|^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l^2 \left(\frac{e\bar{E}_o \bar{k}}{m\Omega^2} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left[n_{\bar{p}+\bar{k}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) - n_{\bar{p}}(\omega) N_{\bar{k}} \right] [\Delta_1^+ - \Delta_1^-] \\ & + \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(\omega) N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}}(\omega) (N_{\bar{k}} + 1) \right] [\Delta_2^+ - \Delta_2^-] \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Nhân 2 vế của phương trình (40) với $\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega x}$ và lấy tích phân

$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots d\omega$. Sử dụng một lần nữa phép chuyển phổ Fourier và lưu ý đến công thức

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x \pm i\delta} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \pm i\pi\delta(x) \\ \rightarrow 2i\pi\delta(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f(x)}{x-i\delta} - \frac{f(x)}{x+i\delta} \right) dx \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta_1^+ - \Delta_1^-] dx &= -2i\pi\delta(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} - l\Omega) \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\Delta_2^+ - \Delta_2^-] dx &= -2i\pi\delta(\varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} - l\Omega) \end{aligned}$$

ta sử dụng

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{\bar{p}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Như vậy công thức (37) khi chú ý đến (38), chúng ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\bar{p}}(t)}{\partial t} = & 2\pi \sum_{\bar{k}} |C_{\bar{k}}|^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l^2 \left(\frac{e\bar{E}_0 \bar{k}}{m\Omega^2} \right) \\ & \left\{ \left[n_{\bar{p}+\bar{k}}(t)(N_{\bar{k}}+1) - n_{\bar{p}}(t)N_{\bar{k}} \right] \delta(\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega_{\bar{k}} - l\Omega) \right. \\ & \left. + \left[n_{\bar{p}-\bar{k}}(t)N_{\bar{k}} - n_{\bar{p}}(t)(N_{\bar{k}}+1) \right] \delta(\varepsilon_{\bar{p}-\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} + \omega_{\bar{k}} - l\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

Trong biểu thức (40), $n_{\bar{p}}(t)$ và $N_{\bar{k}}$ tương ứng là các hàm phân bố điện tử và phonon. Giải phương trình động lượng tử (41) ta thu được biểu diễn giải tích của hàm phân bố không cân bằng của điện tử $n_{\bar{p}}(t)$, rồi từ biểu thức $n_{\bar{p}}(t)$ ta có thể tính được các đại lượng đặc trưng cho quá trình không cân bằng, nghĩa là ta có được lý thuyết lượng tử các quá trình không cân bằng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Nguyễn Quang Bá, Đỗ Quốc Hùng, Vũ Văn Hùng, Lê Tuấn (2011), *Lý thuyết bán dẫn hiện đại*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Nguyễn Quang Bá, Hà Huy Bằng (2002), *Lý thuyết trường lượng tử cho hệ nhiều hạt*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
3. Nguyễn Quang Bá, Bùi Bằng Đoàn, Nguyễn Văn Hùng (1998), *Vật lý thống kê*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
4. Nguyễn Quang Bá, Nguyễn Vũ Nhân, Phạm Văn Bền (2010), *Vật lý bán dẫn thấp chiều*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
5. Nguyễn Xuân Hân (1998), *Cơ sở lý thuyết trường lượng tử*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
6. Nguyễn Văn Hùng (2000), *Lý thuyết chất rắn*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
7. Landau L. D. và Lifshitz E. M. (1975), *Cơ học lượng tử*, Nxb. Khoa học Kỹ thuật.
8. Nguyễn Hữu Minh, Tạ Duy Lợi, Đỗ Đình Thanh, Lê Trọng Tường (2003), *Bài tập vật lý lý thuyết - Tập II*, Nxb. Giáo dục.
9. Murray R. Spiegel (1998), *Các công thức và bảng toán học cao cấp*, Nxb. Giáo dục, trang 132.

10. Lê Thái Hưng (2013), “Ảnh hưởng của phonon giam cầm lên một số hiệu ứng cao tần trong bán dẫn thấp chiều”, *Luận án tiến sĩ*.
11. Hoàng Đình Triển (2012), “Nghiên cứu sự hấp thụ phi tuyến sóng điện từ bởi điện từ giam cầm trong dây lượng tử”, *Luận án tiến sĩ*.
12. Đỗ Mạnh Hùng (2011), “Một số hiệu ứng động trong các hệ bán dẫn thấp chiều”, *Luận án tiến sĩ*.

13. Abouelaoualim (1987), "Electron-confined LO-phonon scattering in GaAs-Al_{0.45}Ga_{0.55}As superlattice", *Pramana Journal of Physics*, Vol. 66, p. 455.
14. A. F. Khokhlov, I. A. Chuchmaĭ, and A. V. Ershov (2000) "Absorption Features in α -Si/ZrO_x Nanostructures", *Semiconductors*, Vol. 34, Issue 3, p. 344.
15. Ayhan Özmen, Yusuf Yakar, Bekir Çakır, Ülfet Atav (2009), "Computation of the oscillator strength and absorption coefficients for the intersub-band transitions of the spherical quantum dot", *Opt. Communications*. 282, p. 3999.
16. Blencowe M. and Skik A. (1996), "Acoustic conductivity of quantum wires", *Phys. Rev. B* 54, p. 13899.
17. Blencowe M. (1990), "In Electronic Properties of Multi layers and Low-dimensional Semiconductor Structures", edited by J. M. Chamberlain, L. Eaves, and J. C. Portal (Plenum Press, New York 51).
18. Chmitt-Rink S., Chemla D. S. and Miller D. A. B. (1989), "Linear and nonlinear optical properties of semiconductor quantum wells", *Adv. Phys*, 38 (2), p. 89.
19. Chaubay M. P. and Van Vliet C. M. (1996), "Transverse Magneto conductivity of quasi two-dimensional semiconductor layers in the presence of phonon scattering", *Phys. Rev B*, 33(8), p. 5617.
20. Do Manh Hung, Nguyen Quang Bau (2009), "Investigation of the nonlinear absorption phenomena of a strong electromagnetic wave by confined electrons in the compositional superlattices", *Journal of the Advances in Natural Sciences*. Vol. 10, No. 3, p. 317.

21. Do Manh Hung, Nguyen Quang Bau, Hoang Dinh Trien, Nguyen Thi Nhan (2008), "Calculations of The Nonlinear Absorption Coefficient of a Strong Electromagnetic Wave by Confined Electrons in the Compositional Super- lattices", *VNU Journal of Science, Mathematics Physics.*, No. 24, 1S, p. 236.
22. Epstein E. M. (1975), "Interaction of intensive electromagnetic wave on electron properties of semiconductors", *Communications of HEE of USSR, ser. Radio Physics*, 18, p. 785.
23. Feng P. and Chen N. X. (1992), "Amplification of the interface-phonon population under an intense laser field", *Phys. Rev. B* 46(12), p. 7627
24. Galperin M. Y., "Introduction to Modern Solid State Physics", Aug, (2001). ([http://edu.ioffe.ru/lib/galperin/.](http://edu.ioffe.ru/lib/galperin/))
25. Glavin B. A., Kochelap V. A., Linnik T. L., Kim K. W., and Strosio (2002), "Generation of high-frequency coherent acoustic phonons in superlattices under hopping transport. Linear theory of phonon instability", *Phys. Rev*, B65(8), p. 085303.
26. Gold A. and Ghazali A. (1990), "Analytical results for Semiconductor quantum wire: Plasmons, shallows impurity states, and mobility", *Phys. Rev.*, B41, p. 7626.
27. G. E. Jellison Jr , and F. A. Modine (1996) "Erratum: Parameterization of the optical functions of amorphous materials in the inter-band region", *Appl. Phys. Lett.* 69, p. 371.
28. Geyler V. A., Margulis V. A. (2000), "Quantization of the conductance of a three - dimensional quantum wire in the presence of a magnetic field", *Phys. Rev.*, B.61(3), p. 1716.
29. G. G. Zegrya and V. E. Perlin, (1998) "Intra-band absorption of light in Quantum wells induced by electron-electron collisions", *Semiconductors*, Vol. 32, Issue 4, p. 417.

30. Ham H. and Harold N. S. (2000), "Excitation line width due to scattering by polar optical phonons in semiconducting cylindrical quantum wire structures", *Phys. Rev.*, B62, p. 13599.
31. Hoang Dinh Trien, Nguyen Vu Nhan, Do Manh Hung, Nguyen Quang Bau (2009), "The dependence of the parametric transformation coefficient of acoustic and optical phonon in doped superlattices on concentration of impurities", *VNU Journal of Science, Mathematics-Physics*, Vol. 25, No. 2, p. 123.
32. H. Rucker, E. Molinari and P. Lugli, (1992) "Microscopic calculation of the electron-phonon interaction in quantum wells", *Phys. Rev. B* 45, p. 6747.
33. Herbst M., Glanemann M., Axt V. M., and Kuhn T. (2003), "Electron-phonon quantum kinetics for spatially inhomogeneous excitations", *Phys. Rev.*, B67, p. 195305.
34. Herman M.A., Sitter H. (1988), *Molecular beam epitaxy*, Springer Ser. Mat. Sci., 7, Springer, Berlin, Heisenberg. Yasuyuki Matsumoto, Shunji Ozaki, and Sadao Adachi (1999) "Optical properties of the bulk amorphous semiconductor ZnIn_2Te_4 ", *J. Appl. Phys.* 86, p. 3705.
35. I. Karabulut, and S. Baskoutas, (2008) "Linear and nonlinear optical absorption coefficients and refractive index changes in spherical quantum dots: Effects of impurities, electric field, size, and optical intensity", *J. Appl. Phys.*, Vol. 103, 073512.
36. J. R. Kuklinski and Shaul Mukamel (1991), "Generalized semiconductor Bloch equations: Local fields and transient gratings", *Phys. Rev. B* 44, 11253–11259
37. Kotthaus L. P. (1988), *Interfaces, quantum wells and Superlattices*, Plenum, New York.
38. K. Ploog, G.H. Dohler, (1983) "Compositional and doping superlattices in II-V semiconductors", *Adv. Phys.* 32, p. 285.

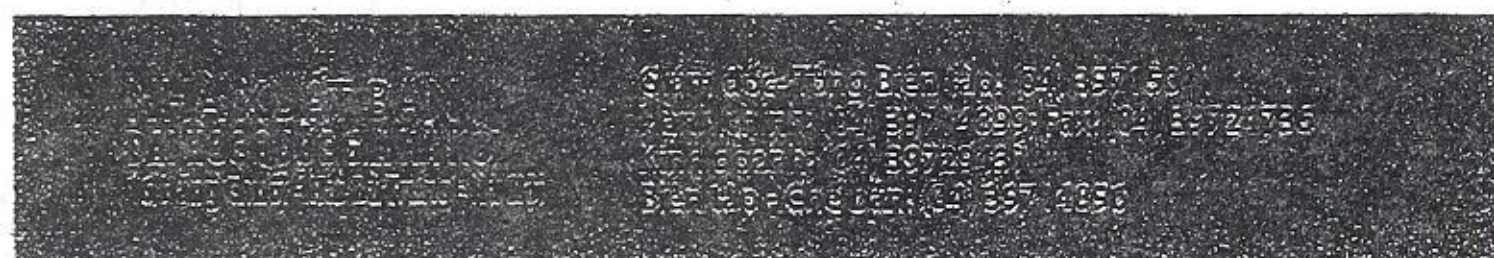
39. Komirenko S. M., Kim K. W., Demidenko A. A., Kochelap V. A. and Strosio M. A., (2000) "Generation and amplification of sub-THz coherent acoustic phonons under the drift of two-dimensional electrons", *Phys. Rev.*, B62(11), p. 7459.
40. Mickevicius R., Mitin V (1993), "Acoustic-phonon scattering in a rectangular quantum wires", *Phys. Rev B*, 48(23), p. 17194.
41. Masale M. and Constantinou N.C. (1993), "Electron-LO phonon scattering rates in cylindrical quantum wire with an axial magnetic field: Analytic results", *Phys. Rev.*, B48(15), p. 11128.
42. Mori N. and Ando T. (1989), "Electron-Optical phonon interaction in single and double heterostructures", *Phys. Rev.*, B40, p. 6175.
43. M. Richter, A. Carmele, S. Butscher, N. Beking, F. Milde, P. Kratzer, M. Scheffler and A. Knorr¹, (2009) "Two-dimensional electron gases: Theory of ultrafast dynamics of electron-phonon interactions in graphene, surfaces, and quantum wells", *J. Appl. Phys.* 105, p. 2409.
44. Nguyen Quang Bau, Do Manh Hung, Le Thai Hung (2010), "The influences of confined phonons on the nonlinear absorption coefficient of a strong electrom-agnetic wave by confined electrons in doping superlattices", *Journal of the USA Progress In Electromagnetic Research L*, vol. 15, p. 175
45. Nguyen Quang Bau, Do Manh Hung (2010), "Calculation of the nonlinear absorption coefficient of a strong electromagnetic wave by confined electrons in Doping Superlattices", *Journal of the USA Progress In Electromagnetic Research B*, vol. 25, p. 39.
46. Nguyen Quang Bau, Do Manh Hung, Nguyen Bich Ngoc (2009), "The Nonlinear Absorption Coefficient of a Strong Electromagnetic Wave Caused by Confined Electrons in Quantum Wells", *Journal of the Korean Physical Society*, Vol. 54, No. 2, p. 765.

47. Nguyen Quang Bau, Nguyen The Toan, Chhoumm Navy, and Tran Cong Phong (1996), "The theory of absorption of weak electro-magnetic wave by free electrons in semiconductor superlattices", *Communications in Physics*, 6(1), p. 33.
48. Nguyen Quang Bau, Tran Cong Phong (1998), "Calculations of the Absorption Coefficient of a Weak Electromagnetic Wave by Free Carrier in Quantum Wells by the Kubo-Mori Method", *J. Phys. Soc. Japan*, 67, p. 3875.
49. Nguyen Quang Bau, Nguyen Vu Nhan, and Tran Cong Phong, (2002) "Calculations of the absorption coefficient of a weak Electromagnetic wave by free carriers in doped superlattices by using the Kubo-Mori method", *J. Korean. Phys. Soc.*, Vol. 41, 149.
50. Nguyen Quang Bau, Tran Cong Phong (2003), "Parametric resonance of acoustic and optical phonon in quantum well", *Journal of the Korean Physical Society*, 42(5), p. 647.
51. N. Q. Bau, L. Dinh, and T. C. Phong, (2007), "Absorption coefficient of weak electromagnetic wave caused by confined electrons in quantum wires", *J. Korean. Phys. Soc.*, Vol. 51, p.1325.
52. Nguyen quang Bau, Nguyen The Toan, Chhoumm Navy, and Tran Cong Phong (1996), "The theory of absorption of a weak electromagnetic wave by free electrons in semiconductor superlattices", *Communications in Physics*, 6(1), p.33.
53. Nguyen Hong Son, and Nazareno H. N. (1994), "Propagation of elastic waves in Semiconductor superlattices under the action of a laser field", *Phys. Rev.*, B50, p. 1619.
54. Nguyen Hong Son and Nazareno H. N. (1996), "Hopping conduction in semiconductor supperlattices in a quantized magnetic field", *Phys. Rev B*, 53(12), pp. 7937-7944.
55. Nguyen Thi Mai Nhien, Le Thai Hung, Do Manh Hung, Nguyen Quang Bau (2008), "The Parametric Resonance of Confined Acoustic

Phonons in Quantum Wells", *VNU Journal of Science, Mathematics Physics.*, No. 24, 1S, p. 240.

56. Nam L. K., Youn J. L. and Sang D. C. (2004), "Derivation of the DC conductivity in a quantum well by using an operator Algebra technique", *J.Korean. Phys. Soc.*, Vol 44(6), p. 1535.
57. Ozmen, A., Y. Yakar, B. Cakir, and U. Atav (2009), "Computation of the oscillator strength and absorption coefficients for the intersubband transition of the spherical quantum dot", *Opt. Commun.*, Vol. 282, p.3999.
58. Ploog K., Dholer G. H. (1983), "Compositional and doping superlattices in III-V semiconductors", *Advances in Physics*, 32(3), p. 285. Pavlovich V. V. and E. M. Epshtein (1977), "Quantum theory of absorption of electromagnetic wave by free carries in bulk semiconductor", *Sov. Phys. Stat.*, 19, p. 1764.
59. P. Vasilopoulos, M. Charbonneau and C. M. Van Vliet (1987), "Linear and nonlinear electrical conduction in quasi two-dimensional quantum wells", *Phys. Rev. B*, Vol. 35, p.1334.
60. Ruden P. and Gottfried H. Dholer (1983), "Electronic structure of semiconductors with doping superlattices", *Phys. Rev B*, 27(6), p.3538.
61. S. Butscher, and A. Knorr, (2006) "Occurrence of intersub-band polaronic repellent in a two- dimensional electron gas", *Phys. Rev. L*, Vol. 97, 197401.
62. Shih, T., K. Reimann, M. Woerner, T. Elsaesser, I. Waldmuler, A. Knorr, R. Hey, and K. H. Ploog (2006), "Radiative coupling of inter sub-band transitions in GaAs/AlGaAs multiple quantum well", *Physical E*, Vol. 32, p. 265.
63. Suzuki A. (1992), "Theory of hot-electron magneto-phonon resonance in quasi two-dimensional quantum well structures", *Phys. Rew.*, B45, pp. 673-6741.

64. Shmelev G.M, Nguyen Quang Bau, Vo Hong Anh (1981), "Parametric Transformation of plasmons and phonons in Semiconductor". Communication of Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, p.17
65. Samuel, E. P. and D. S. Patil (2008), "Analysis of wave function distribution in quantum well biased laser diode using transfer matrix method", *Progress In Electromagnetic Research Letters*, Vol. 1, p. 119.
66. T. A. Pagava, N. I. Maisuradze and M. G. Beridze (2011), "Effect of a high-energy proton-irradiation dose on the electron mobility in n -Si crystals", *Semiconductors*, Vol 45, No 5, p. 572.
67. Tran Cong Phong, Luong Van Tung, Nguyen Quang Bau (2008), "Parametric Resonance of Optical Phonons in a Doped Semiconductor Superlattice", *Journal of the Korean Physical Society*, Vol. 53, No. 4, October, p.1975.
68. V. M. Lyubin and M. L. Klebanov, (1998) "Laser-induced anisotropic absorption, reflection, and catering of light in chalcogenide glassy semiconductors", *Semiconductors*, Issue 8, Vol. 32, p.817.
69. V. L. Malevich and I. A. Utkin (2000) "Nonlinear Optical Absorption in a Heavily Doped Degenerate n -GaAs", *Semiconductors*, Vol. 34, Issue 8, p. 924.
70. Yakar, Y., B. Cakir, and A. Ozmen (2010), "Calculation of linear and nonlinear optical absorption coefficients of a spherriical quantum dot with parabolic potential", *Opt. Commun.*, Vol. 283, p.1795.



Chịu trách nhiệm xuất bản: Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung: Hội đồng nghiệm thu giáo trình
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN

Người nhận xét: PGS.TS. HỒ QUANG QUÝ
GS. TS. HÀ HUY BẰNG

Biên tập: NGUYỄN THỦY

Chế bản: BÍCH DIỆP

Trình bày bìa: NGỌC ANH

**HẤP THỤ PHI TUYỂN SÓNG ĐIỆN TỬ
TRONG CÁC HỆ BÁN DẪN THẤP CHIỀU**

Mã số: 1K-29 ĐH2014

In 300 cuốn, khổ 16x24 cm tại CTCP Khoa học và Công nghệ Hoàng Quốc Việt

Địa chỉ: 18 Hoàng Quốc Việt, Nghĩa Đô, Cầu Giấy, Hà Nội

Số xuất bản: 2662 - 2014/CXB/32 - 421/ĐHQGHN, ngày 15/12/2014

Quyết định xuất bản số: 45KH - TN/QĐ - NXB ĐHQGHN ngày 24/12/2014

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2014

HẤP THỤ PHI TUYẾN SÓNG ĐIỆN TỪ TRONG CÁC HỆ BÁN DẪN THẤP CHIỀU



ISBN: 978-604-62-1903-3



Giá: 57.000đ